Электронный журнал «Техническая акустика»
http://webcenter.ru/~eeaa/ejta/

2003, 13

Т. С. Комашинская

Уссурийский государственный педагогический институт
692500, Россия, Приморский край, г. Уссурийск, ул. Чичерина, 54
e-mail: tskom@wom.ru

Численное исследование обратных экстремальных задач активного управления звуковыми полями в двумерных многомодовых волноводах

Получена 05.06.2003, опубликована 26.06.2003

В работе рассматриваются обратные экстремальные задачи минимизации мощности звукового поля в двумерном многомодовом волноводе. Приводятся результаты вычислительных экспериментов по минимизации мощности первичного звукового поля с помощью вторичных антенных решеток различной конфигурации. Полученные результаты анализируются.

ВВЕДЕНИЕ

Большое внимание в последнее десятилетие уделяется исследованию линейных и нелинейных задач активной минимизации звуковых полей в волноводах. Вычислительные эксперименты по решению обратных экстремальных задач, описанные в [1–4], проводились для волноводов малой либо средней глубины, число нормальных мод в которых достигает 50–60. В то же время на практике приходится иметь дело с глубокими волноводами, число распространяющихся мод в которых может равняться от нескольких сот до нескольких тысяч.

В [3–7] показано, что решение нелинейной задачи, в которой требуется определить как интенсивности источников вторичной антенны, так и их координаты, является наиболее эффективным при решении задачи минимизации звука. Однако, решение нелинейной задачи требует больших вычислительных затрат, которые резко возрастают при увеличении числа мод в волноводе.

В данной работе рассматривается обратная линейная задача активной минимизации звуковых полей в двумерном многомодовом волноводе, в которой требуется определить только интенсивности источников вторичной антенны. Алгоритмы, разработанные в [3–7], применяются для решения линейных задач с использованием вторичных антенн линейной формы (вертикальных, наклонных и горизонтальных) и антенн в форме полуокружности. Приводятся результаты вычислительных экспериментов. Показано, что полного подавления мощности поля первичного источника можно добиться при решении линейной задачи для определенных конфигураций вторичной антенны.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $D = \{x=(x,z):\ 0<z<H,\ -\infty<x<\infty\}$ — плоский регулярный акустический двумерный волновод глубины H с абсолютно мягкой верхней границей $z=0$ и импедансной, в общем случае, нижней границей $z=H$. Введем $2\times N$ матрицу

$$\mathrm{Z}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \end{pmatrix},$$

и сопоставим ей дискретную антенну, состоящую из N монополей, расположенных в точках $(x_j,\ z_j)$, с интенсивностями q_j.

Хорошо известно [8], что прямая задача излучения звука в волноводе D состоит в нахождении акустического давления p, удовлетворяющего уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right]+k^2(z)p=-f(x,z),$$

граничным условиям

$$p=0 \ \text{ при } \ z=0,\ \ \sin\beta p+\cos\beta\frac{\partial p}{\partial n}=0 \ \text{ при } \ z=H,\ \ \beta\in[0,\pi/2]$$

и условию излучения на бесконечности. Здесь $k(z)=\omega/c(z)$, где $c(z)$ — переменная скорость звука, ω – круговая частота звукового поля, n — единичный вектор внешней нормали, β — постоянный параметр, определяющий акустические свойства нижней границы (в данной работе нижняя граница считается абсолютно жесткой и $\beta = 0$).

Используя метод Фурье, решение задачи может быть записано в виде

$$p=\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\xi_n^{-\frac{1}{2}}a_{nj}q_j\varphi_n(z)e^{i\xi_n x},$$

где ξ_n, φ_n – собственные значения и нормированные собственные функции самосопряженной спектральной задачи

$$\varphi''(z)+[k^2(z)-\xi^2]\varphi=0 \ \text{ в } \ (0,H), \tag{1}$$

$$\varphi(0)=0,\ \ \sin\beta\varphi(H)+\cos\beta\varphi'(H)=0,\ \ \beta\in[0,\pi/2], \tag{2}$$

M — число распространяющихся в волноводе нормальных мод, $\mathrm{q}=(q_1,q_2,\dots,q_N)$ — вектор, составленный из комплексных амплитуд интенсивностей источников антенны, a_{nj} — компоненты прямоугольной $M\times N$ матрицы A, определяемые формулой

$$a_{nj}=\xi_n^{-\frac{1}{2}}\varphi_n(z_j)e^{-i\xi_n x_j}.$$

Если в дальней зоне волновода D, кроме поля p, присутствует поле p_b, создаваемое первичным (шумящим) источником и определяемое формулой

$$p_b = -\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{M}\xi_n^{-\frac{1}{2}} b_n \varphi_n(z) e^{i\xi_n x},$$

то мощность первичного поля и мощность суммарного поля, переносимые в дальнюю зону волновода, определяются формулами

$$P(p_b) = \frac{1}{8\omega}\|[\mathrm{b}]^2, \quad P(p+p_b) = \frac{1}{8\omega}\|[A\mathrm{q}-\mathrm{b}]^2, \ \mathrm{b} = (b_1, b_2, ..., b_M). \tag{3}$$

Здесь b – заданный вектор, характеризующий поле шумящего источника.

Введем в рассмотрение область Ω, где могут размещаться источники вторичной антенны, параметр регуляризации Q_0^2 и множество B в пространстве C^N, образованное векторами q, удовлетворяющими условию

$$\|\mathrm{q}\|^2 = \sum_{j=1}^{N} |q_j|^2 \le Q_0^2. \tag{4}$$

Положим $J(\mathrm{Z},\mathrm{q}; N) = |[A(\mathrm{Z})\mathrm{q} - \mathrm{b}]|^2$ и рассмотрим следующую задачу:

Задача 1 (линейная задача). *Для заданных поля p_b, числа N и решетки* $\mathrm{Z} \in \Omega$ *найти вектор* $\mathrm{q} \in B$*, минимизирующий функционал J.*

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения Задачи 1 в [3] был разработан численный алгоритм, основанный на регуляризованном методе условной квадратичной оптимизации относительно комплексных амплитуд интенсивностей монополей.

Все расчеты проводились на компьютере типа PC с процессором pentium-II (533 МГц) и оперативной памятью 128 Мб.

Для проведения вычислительных экспериментов использовался волновод D средней глубины со следующими параметрами: H = 1000 м, ω = 200π, M = 138, ρ = 1 г/см^3, c = 1450 м/сек, λ = 14,5 м.

Поскольку рассматриваемый волновод является однородным, то собственные значения и ортонормированные собственные функции спектральной задачи (1), (2) определяются явными формулами [8]:

$$\xi_n^2 = k^2 - \mu_n^2, \ \mu_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{H}, \ \varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{H}}\sin(\mu_n z), \ n = 1, 2, \ldots, M.$$

Уровень подавления мощности поля первичного источника будем считать удовлетворительным, если величина подавляемой мощности $|\Delta P|$, определяемая формулой

$$(\Delta P)\,\text{дБ} = 10\lg(P(p+p_b)/P(p_b)),$$

составляет порядка 50 дБ, и полным, если $|\Delta P| \ge 100$ дБ.

Для удобства анализа разобьем множество вычислительных экспериментов по гашению звука в волноводе на 3 группы. Критерием разбиения является форма

вторичной антенны. В расчетах использовались линейные вертикальные эквидистантные антенны с различным расстоянием между источниками, линейные антенны, источники которых задаются в шахматном порядке, и антенны, имеющие форму полуокружности. Каждому типу антенн соответствует группа вычислительных экспериментов. Для всех тестов значение энергетического параметра Q_0^2 выбиралось равным 10.

2.1. Вычислительные эксперименты I группы

Первая группа состоит из экспериментов по гашению поля первичного источника, который расположен левее антенной решетки, с координатами $(x_0, H/2)$, причем расстояние $|x_0|$ между первичным источником и антенной является переменной величиной. Источники вторичной антенны определяются соотношением

$$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_N),\ z_j = z_1 + (j-1)\cdot h,\ j = 2,\ldots,N,$$

где $z_1 = H/(2N), N = M$, а шаг решетки h различен для каждого теста.

Цель данной группы вычислительных экспериментов состоит в изучении зависимости решения (величины подавляемой мощности) от расположения антенны и величины x_0.

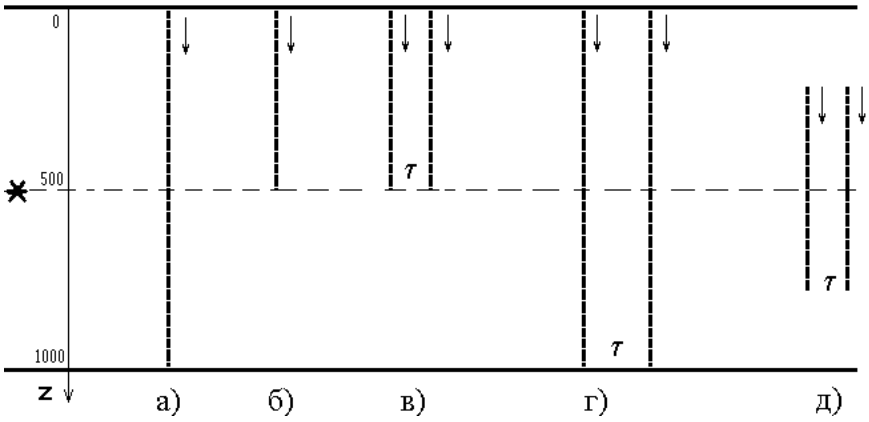


Рис. 1. Геометрия компенсирующих антенн для тестов первой группы

В первом тесте вертикальная решетка из 138 источников, расположенная на оси z, занимает всю глубину H волновода при $h = \lambda/2$. Ее геометрия показана на рис. 1а. На рис. 3а показана зависимость величины подавляемой мощности от количества N источников. Кривые 1, 2 и 3 отвечают различным расстояниям первичного источника от компенсирующей решетки, а именно: $|x_0| = 10\lambda$, 100λ, 200λ. Видно, что все три кривые практически совпадают и при $N = M = 138$ происходит полное подавление мощности первичного источника.

Во втором тесте расстояние h между источниками антенны уменьшено до $\lambda/4$. С учетом этого антенна из 138 источников занимает верхнюю половину волновода (см. рис. 1б). Первичный источник по-прежнему занимает те же три положения, которым

соответствуют три кривые на рис. 3б. Как и в первом тесте, величина ΔP мало зависит от x_0, но даже в случае 138 источников подавление составляет порядка 5 дБ.

В третьем тесте шаг h равен половине длины волны: $h = \lambda/2$, но антенна расположена не на одной прямой (как в тесте 1), а на двух прямых, занимающих верхнюю половину волновода и расположенных на расстоянии τ друг от друга (см. рис. 1в). Первичный источник помещен в точку с координатами (-100λ, $H/2$). На рис. 3в показана зависимость величины подавляемой мощности от количества источников антенны, при этом величина τ равнялась λ, 10λ и 20λ (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Из рисунка видно, что для всех значений τ величина подавляемой мощности составляет менее 8 дБ.

В следующем тесте расстояние h между источниками антенны равно λ. Поэтому антенна, состоящая из двух линейных решеток, занимает всю глубину волновода (рис. 1г). Для тех же самых значений τ и x_0 величина подавляемой мощности $|\Delta P|$ несколько увеличилась, хотя подавление по-прежнему остается неудовлетворительным и составляет порядка 23 дБ, в чем можно убедиться из рис. 3в (кривые 4, 5, 6 соответствуют $\tau = \lambda$, 10λ, 20λ).

Однако, для данной геометрии излучающей системы (т. е. положения первичного источника в точке (-100λ, $H/2$) и формы вторичной антенны, изображенной на рис. 1г) можно подобрать такое расстояние τ, что при $N = M$ наступает полное подавление мощности первичного источника. На рис. 3г показано (кривая 1), что для $\tau \approx 17{,}6\lambda$ = 255 м при $N = M$ величина $|\Delta P|$ равна 100 дБ. Если же при найденном значении τ использовать антенну, сосредоточенную в верхней половине волновода (изображенную на рис. 1в), то максимальное подавление составляет всего 7 дБ (кривая 2 на рис. 3г). Кривая 3 на рис. 3г отвечает антенне, получаемой сдвигом предыдущей антенны вниз на 250 м. Указанная антенна состоит из двух линейных вертикальных решеток, расположенных на расстоянии τ = 255 м друг от друга с шагом $h = \lambda/2$ между источниками, и занимает среднюю часть волновода (см. рис. 1д). Из рис. 3г видно, что для этого случая величина подавляемой мощности составляет менее 9 дБ.

Последние три теста данной группы отвечают подавлению мощности первичного поля двумя антеннами, расположенными на фиксированном расстоянии τ = 255 м друг от друга при условии, что модуль координаты x_0 первичного источника изменяется от $\lambda/4$ до 40λ с шагом $\lambda/4$ при неизменной координате $z_0 = H/2$. На рис. 3д показана зависимость величины подавляемой мощности ΔP от координаты x_0 для антенны, занимающей всю глубину волновода (см. рис. 1г). Из рисунка следует, что полное подавление (100 дБ и более) происходит лишь для некоторых значений x_0. Кривая 1 на рис. 3е отвечает антенне, изображенной на рис. 1в, состоящей из двух прямых и занимающей верхнюю половину волновода, а кривая 2 отвечает антенне, изображенной на рис. 1д. Из рис. 3е видно, что для первой антенны, занимающей верхнюю половину волновода, величина подавляемой мощности практически не зависит от x_0 и составляет менее 10 дБ, тогда как для второй антенны, занимающей середину волновода, величина

подавляемой мощности существенно зависит от $|x_0|$. При малых $|x_0|$ порядка $\lambda/2$ происходит полное подавление мощности, тогда как при $|x_0| > 10\lambda$ подавление составляет менее 20 дБ.

Таким образом, на основании приведенных выше вычислительных экспериментов, можно сделать вывод о том, что наиболее эффективной по подавлению мощности является симметрично расположенная относительно первичного источника антенна при условии, что она занимает всю глубину волновода и состоит из одной решетки с шагом $h = \lambda/2$, либо двух решеток с шагом $h = \lambda$ при определенном выборе расстояния τ между решетками. Менее эффективной является вертикальная антенна, расположенная в средней части волновода, хотя и симметрично относительно первичного источника. Наконец, крайне неэффективной является вертикальная антенна, расположенная вверху либо внизу волновода, то есть несимметрично относительно первичного источника.

2.2. Вычислительные эксперименты II группы

Во вторую группу относятся эксперименты по решению линейной задачи гашения первичного поля, создаваемого источником, сосредоточенным в точке (0, $H/2$), при условии, что компенсирующая антенна расположена на одной прямой с данным источником.

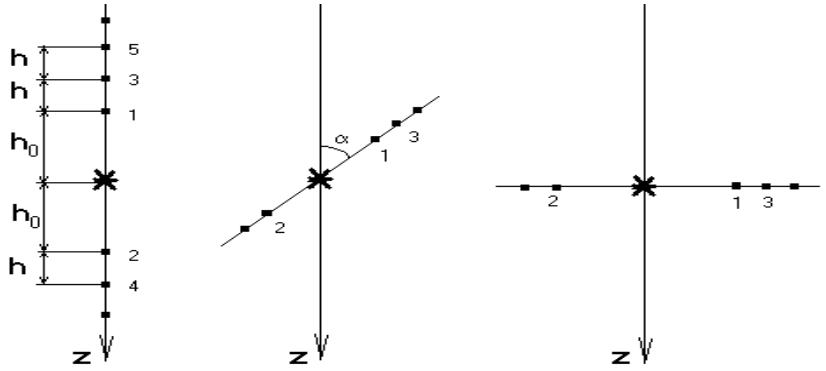


Рис. 2. *Геометрия компенсирующих антенн для тестов второй группы*

Как показано на рис. 2 источники антенны располагаются на расстоянии h_0 от первичного источника с шагом h, причем первый источник антенны располагается выше (и/или правее) первичного источника, второй – ниже (и/или левее) и т. д. Для всех приведенных ниже тестов шаг сетки h выбирался постоянным, равным $\lambda/10$. Целью вычислительных экспериментов этой группы явилось изучение зависимости количества N источников вторичной антенны, необходимых для полного подавления мощности первичного поля, от расстояния h_0, при использовании вертикальных, наклонных и горизонтальных антенн. При проведении расчетов угол α выбирался равным $\pi/4$.

На рис. 4а показана зависимость величины подавляемой мощности от числа источников вторичной антенны для значения $h_0 = \lambda/10$. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют

вертикальной, наклонной и горизонтальной антеннам. Из рисунка видно, что для полного подавления мощности с помощью вертикальной антенны необходимо 8 источников, с помощью наклонной — 7 источников, а с помощью горизонтальной — только 5 источников вторичной антенны.

Рис. 4б–4е являются аналогами рис. 4а для этих трех антенн при $h_0 = \lambda/4$, $h_0 = \lambda/2$, $h_0 = \lambda$, $h_0 = 5/4\lambda$, $h_0 = 2\lambda$. Из рисунков видно, что при $h_0 = \lambda/4$ полное подавление для каждой из трех антенн происходит соответственно при $N = 17$, 13 и 9 (кривые 1, 2 и 3). При $h_0 = \lambda/2$ использование вертикальной антенны из $N = 150 > M$ источников приводит лишь к удовлетворительному уровню подавления, тогда как использование наклонной и горизонтальной антенн приводит к полному подавлению при $N = 74$ и $N = 22$ соответственно. Если еще увеличить значение h_0 и сделать его равным одной длине волны, то для вертикальной и наклонной антенн величина $|\Delta P|$ составляет менее 8 дБ, а для горизонтальной антенны при $N = 135$ происходит полное подавление (см. рис. 4г). Последующее увеличение значения h_0 еще на четверть длины волны приводит к тому, что уже и для горизонтальной антенны уровень величины подавляемой мощности неудовлетворителен, и при $N = 150$ составляет лишь 18 дБ (рис. 4д). Последний тест отвечает случаю $h_0 = 2\lambda$ (рис. 4е). Для этого теста величина подавляемой мощности практически не зависит от типа антенны и составляет менее 5 дБ.

Итак, из используемых во второй группе антенн наиболее эффективной является горизонтальная антенна, расположенная на одной оси с первичным источником, а наименее эффективной — вертикальная. При малых значениях расстояния h_0 от первого источника компенсирующей антенны до первичного источника ($h_0 < \lambda/2$) полное подавление мощности происходит при числе источников антенны, существенно меньшем числа распространяющихся мод, а при $h_0 \geq 2\lambda$ даже при $N > M$ величина подавляемой мощности остается малой и не превосходит 5 дБ.

2.3. Вычислительные эксперименты III группы

Наконец, третья группа содержит численные эксперименты по исследованию зависимости величины ΔP от количества N источников вторичной антенны в случае, когда антенна имеет форму полуокружности. Первичный источник помещен в точку с координатами $(0, H/2)$, являющуюся центром полуокружности фиксированного радиуса r. Число N источников антенны, расположенных эквидистантно, меняется от 1 до 150 (см. рис. 5а), и для каждого значения N вычисляется величина подавляемой мощности. На рис. 5б в виде кривых 1, 2, 3 и 4 показана зависимость ΔP от N для четырех значений радиуса полуокружности r, равных λ, 2λ, 5λ и 10λ. Из рисунка видно, что для $r = \lambda$ и 2λ подавление составляет немногим менее 70 дБ при $N \geq M$, для $r = 5\lambda$ – около 90 дБ, а для $r = 10\lambda$ – почти 140 дБ. Для $r = 20\lambda$ (рис. 5в) при $N \geq 105$ происходит полное подавление мощности первичного источника. Наконец, для $r = 34\lambda$, когда антенна занимает всю глубину волновода, полное подавление мощности наступает при $N \geq 137$ (см. рис. 5г).

Второй тест отвечает вторичной антенне, имеющей форму полуокружности с радиусом $r = 34\lambda$ и состоящей из $N = 138$ источников. Первичный источник помещен в точку с координатами $(x_0, H/2)$, причем расстояние $|x_0|$ меняется от $\lambda/2$ до 50λ с шагом $\lambda/2$. Полученная зависимость ΔP от x_0 показана на рис. 5д (кривая 1). Видно, что для $0 < |x_0| < 8\lambda$ происходит полное подавление мощности первичного источника ($|\Delta P| = 300$ дБ), а для $|x_0| > 8\lambda$ наступает резкое уменьшение величины подавления. Если увеличить значение энергетического параметра Q_0^2 до 10^6, то ухудшение подавления происходит для $|x_0| > 26\lambda$, а при $Q_0^2 = 10^{10}$ для всех выбранных значений x_0 величина подавляемой мощности равна 300 дБ (см. кривые 2, 3 на рис. 5д). Такое поведение кривых объясняется тем фактом, что при увеличении расстояния $|x_0|$ между первичным источником и вторичной антенной увеличиваются и значения q_j интенсивностей точечных источников. Поэтому, для того, чтобы точное решение системы $A\mathrm{q} = \mathrm{b}$ удовлетворяло условию (4), необходимо увеличить значение энергетического параметра Q_0^2.

Третий тест отвечает случаю, когда расстояние $|x_0|$ фиксировано и равно 10λ, а первичный источник перемещается по вертикали от верхней границы волновода к нижней так, что координата z_0 меняется от 0 до H с шагом 10 м. Из рис. 5е, где приведена зависимость ΔP от z_0, следует, что подавление мощности является наибольшим, когда источник находится на глубине, меньшей 420 м или большей 550 м, тогда как зона расположения источника вблизи середины волновода ($z_0 = 500$ м) является наихудшей для подавления мощности первичного источника.

Таким образом, использование компенсирующей антенны в форме полуокружности является достаточно эффективным для подавления мощности поля первичного источника, а именно: для всех значений r (от λ до 34λ), начиная с некоторого значения N ($N < M$), наступает полное либо удовлетворительное подавление мощности первичного источника. Причем указанный факт справедлив для различных значений x_0 и z_0 координат первичного источника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщая полученные результаты, можно сделать вывод о том, что алгоритм, разработанный для решения линейной задачи активного гашения звука в мелких волноводах, является эффективным и для волноводов средней глубины. Более того, при правильном выборе геометрии вторичной антенны можно достичь полного подавления мощности поля первичного источника при числе N источников вторичной антенны, не превосходящем числа M распространяющихся в волноводе мод, в широком диапазоне изменения параметров волновода и координат первичного источника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benzaria E., Martin V. Secondary source location in active noise control: selection or optimization? J. Sound Vibr. 1994. V. 173. № 1. P. 137–144.
2. Тютекин В. В., Модель плоской активной звукопоглощающей системы. Акустический журнал. 1997. Т.43. Вып. 2. С. 238–243.
3. Алексеев Г. В. Нелинейные задачи активного гашения звука в двумерных слоисто-неоднородных волноводах. Акустический журнал. 1997. Т. 43. № 6. С. 737–743.
4. Алексеев Г. В., Комаров Е. Г. Нелинейные обратные задачи активного управления акустическими полями в двумерных волноводах. Доклады РАН. 1998. Т. 358. № 1. С. 27–31.
5. Алексеев Г. В., Комашинская Т. С. Численный анализ обратных экстремальных задач излучения звука в двумерных глубоких волноводах. Препринт. Владивосток: Дальнаука, 2000. 56 с.
6. Алексеев Г. В., Комашинская Т. С. Численный анализ обратных задач активной минимизации звуковых полей в глубоких плоских волноводах. Акустика неоднородных сред. Новосибирск: Изд-во ИГ СО РАН. 2001. Вып.117. С. 3–10.
7. Алексеев Г. В., Комашинская Т. С. Об активной минимизации потенциальной энергии звукового поля в двумерном многомодовом волноводе. Акустический журнал. 2003. Т. 49. № 2. С. 195–202.
8. Алексеев Г. В. Математические основы акустики океана. Владивосток. Изд-во Дальневост. ун-та, 1988. 228 с.

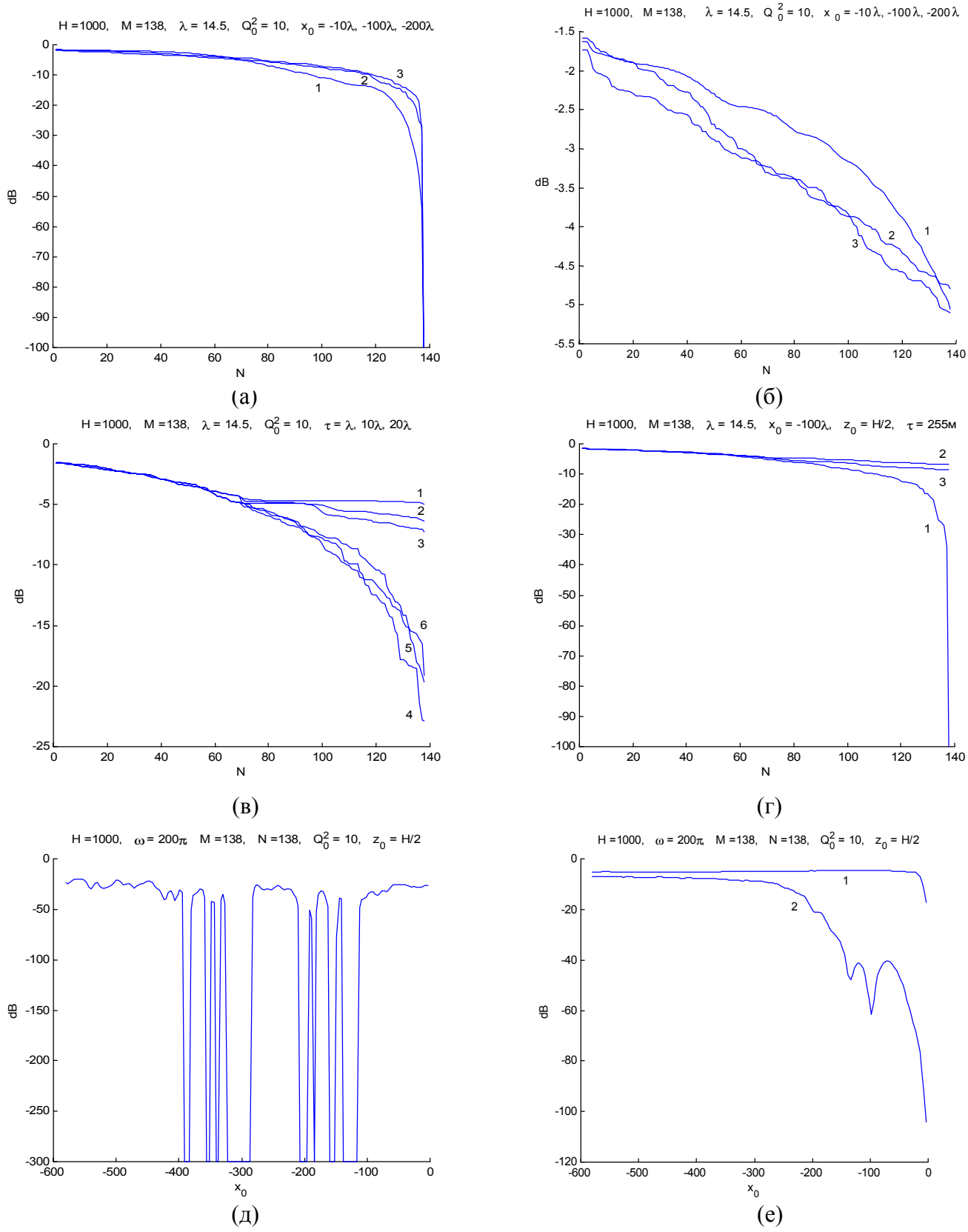
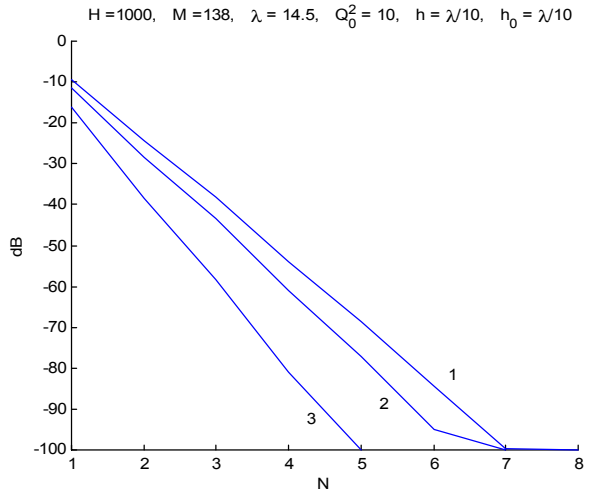
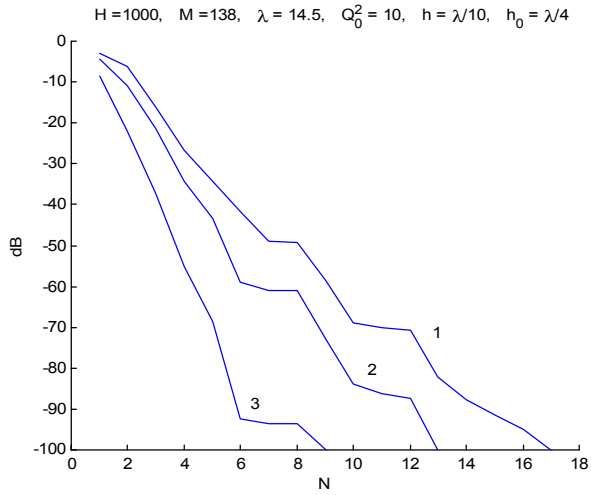


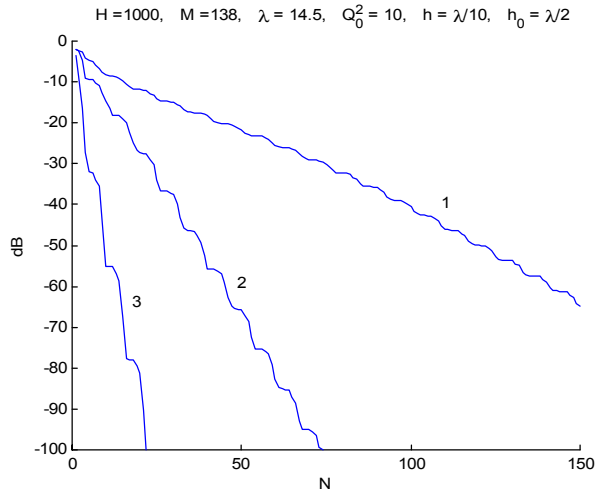
Рис. 3. Результаты вычислительных экспериментов I группы.
Зависимость величины подавляемой мощности ΔP от числа N источников вторичной антенны (рис. а–г) и от координаты x_0 первичного источника (рис. д–е)



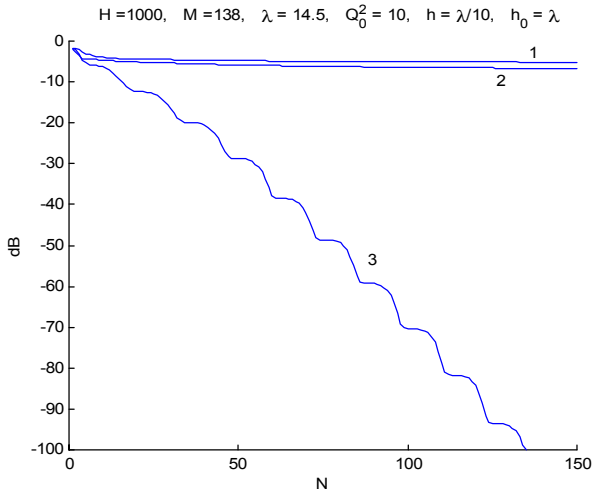
(а)



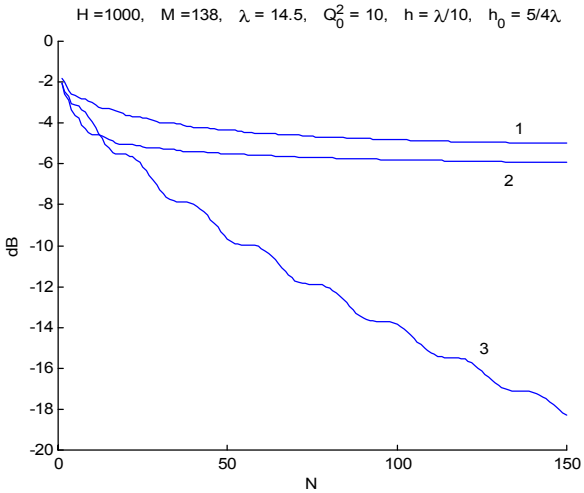
(б)



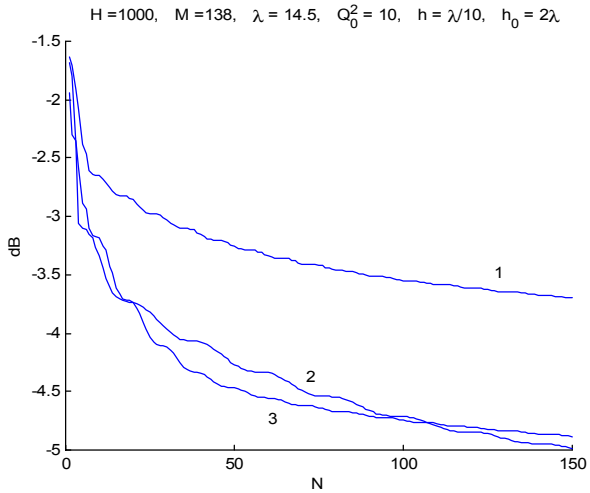
(в)



(г)



(д)



(е)

Рис. 4. Результаты вычислительных экспериментов II группы.
Зависимость величины подавляемой мощности ΔP от числа N источников вторичной антенны

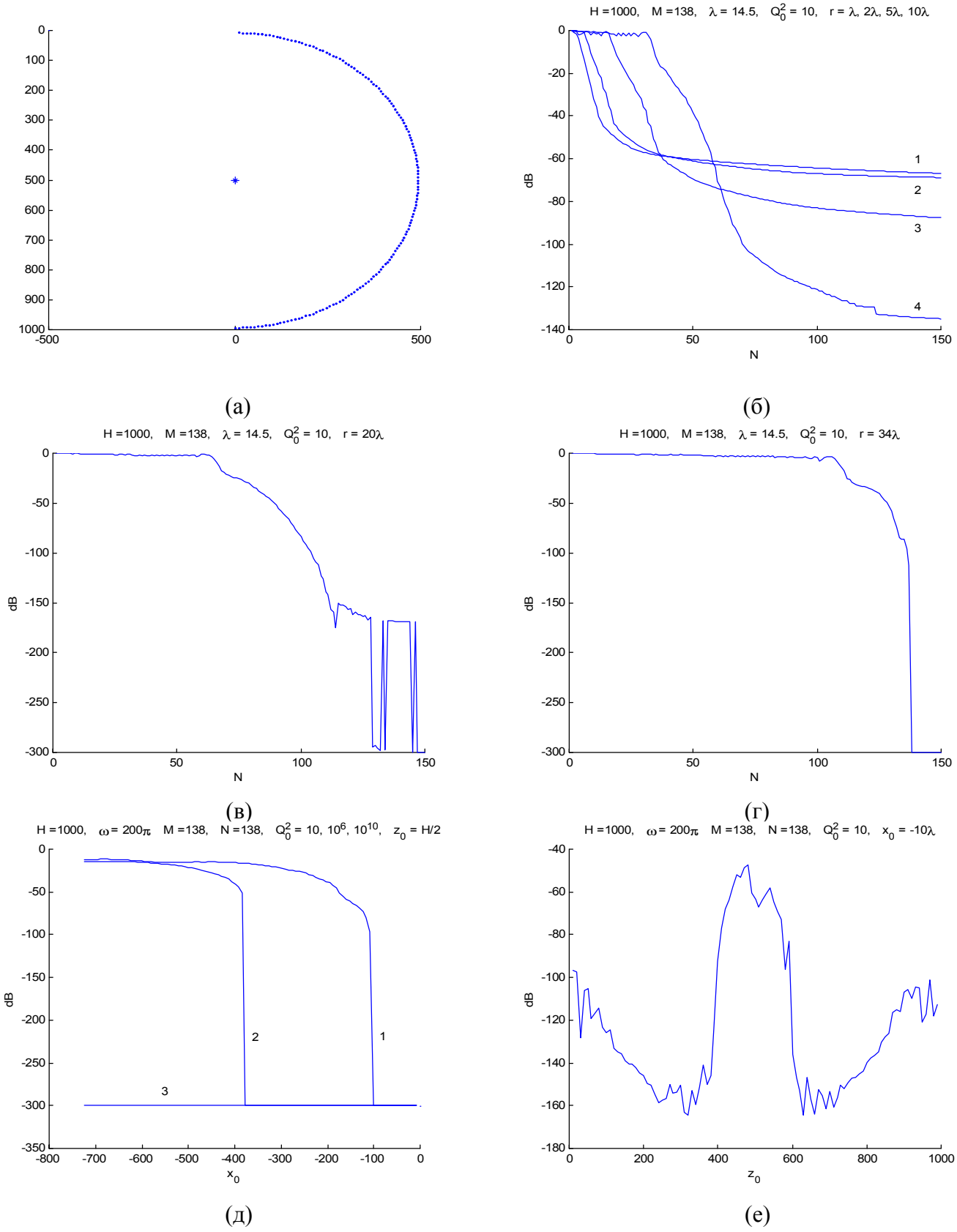


Рис. 5. Результаты вычислительных экспериментов III группы.
Геометрия излучающей системы (рис. а). Зависимость величины подавляемой мощности ΔP от числа N источников вторичной антенны (рис. б–г) и от координат первичного источника (рис. д–е)