Электронный журнал «Техническая акустика»
http://webcenter.ru/~eeaa/ejta/

2003, 8

Ю.М. Заславский

Институт прикладной физики Российской академии наук
Россия, 603950, Н. Новгород, ул. Ульянова, 46, e-mail: zaslav@hydro.appl.sci-nnov.ru

Анализ колебаний сферической полости, расположенной в упругой среде

Получена 05.02.2003, опубликована 04.03.2003

Рассмотрены колебания незаполненной сферической полости, расположенной в упругой среде, при которых сохраняется её объём, а центр периодически смещается. Проведён анализ частотной зависимости амплитуды колебаний, вызванных результирующей осциллирующей силой, воздействующей на стенки полости и связанной с волновыми движениями вмещающей среды. Путём учёта практически возможных значений упругих параметров, охватывающих случаи жёсткой и водоподобной среды, а также два типа граничных условий – проскальзывающая сфера и вмороженная сфера, исследованы возможности появления резонансного максимума в частотной зависимости колебательного отклика. Даётся сравнение с колебательными характеристиками пульсирующей сферической полости.

ВВЕДЕНИЕ

В связи с повышенным интересом к разработке новых подходов при решении актуальных современных проблем неразрушающего дистанционного контроля материалов, медицинской диагностики, геоакустических проблем, связанных с сейсмоакустическим зондированием подземных инженерных сооружений и ряда других, возникает необходимость постановки и анализа некоторых модельных задач, решение которых даст ключ к разработке новых высокоэффективных способов активного зондирования неоднородностей в упругих средах [1]. К их числу относятся задачи по определению колебательных характеристик локальных неоднородностей простейшей формы, расположенных неглубоко под поверхностью грунта. Практический интерес представляет отыскание частот основных типов собственных колебаний, совершаемых локальными неоднородностями, находящимися в окружающей упругой среде. Важную роль играют колебания тела, при которых его центр циклически перемещается, объём остаётся неизменным, а возвращающей силой является упругая реакция окружающей среды, возникающая за счёт деформации её частиц в области, примыкающей к границе контакта. При активном зондировании неоднородностей в грунте используется переменное во времени силовое воздействие, которое может быть обусловлено, в частности, упругой продольной волной, падающей на неоднородность и порождающей вынужденные колебания, направленные вдоль волнового вектора, которые при совпадении по частоте с собственной вызовут резонанс. Проведённый в данной работе анализ посвящён решению задачи отыскания частоты собственных колебаний указанного типа, совершаемой сферической полостью в упругом пространстве, которые в известном смысле аналогичны резонансным колебаниям массивного тела, лежащего на поверхности упругого полупространства — так называемым колебаниям Винклера.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА

Исходными для расчёта являются полученные в [2] пространственные зависимости для колебательных перемещений и напряжений в упругой среде, содержащей тело сферической формы радиуса a, центр которого при колебаниях периодически смещается из равновесия вдоль прямолинейного отрезка. Рассматриваются малые колебания $u << a$, при которых сферический объём и форма сохраняются. На их основе получена связь смещения u с амплитудой осциллирующей силы F, с которой сфера действует на среду, а её следствием является выражение для обобщённой упругости системы: «полость-среда» в виде

$$\kappa = \frac{F}{u} = -\frac{4\pi a\mu\beta^2\left\{(1-i\alpha)\left(6-6i\beta-3\beta^2+i\beta^3\right)+2(1-i\beta)\left(6-6i\alpha-2\alpha^2\right)\right\}}{3\left\{\left(2-2i\alpha-\alpha^2\right)\left(6-6i\beta-3\beta^2+i\beta^3\right)-2(1-i\beta)\left(6-6i\alpha-2\alpha^2\right)\right\}}, \tag{1}$$

для модели «проскальзывающая» сфера,

$$\kappa = \frac{F}{u} = -\frac{4\pi a\mu\beta^2\left\{(1-i\alpha)\left(3-3i\beta-\beta^2\right)+2(1-i\beta)\left(3-3i\alpha-\alpha^2\right)\right\}}{3\left\{\left(2-2i\alpha-\alpha^2\right)\left(3-3i\beta-\beta^2\right)-2(1-i\beta)\left(3-3i\alpha-\alpha^2\right)\right\}} \tag{2}$$

для модели «вмороженная» сфера, где $\alpha = \omega a/c_l$, $\beta = \omega a/c_t$, $\mu = \rho c_t^2$, ω — частота воздействия, ρ — плотность среды, c_l, c_t — скорости распространения продольной и сдвиговой волн.

Имея в виду случай неоднородности в виде пустотелой сферической полости, которой, очевидно, соответствует первая из двух представленных моделей, вычислим упругий отклик на гармоническую силу с использованием обеих формул (1), (2), что даст возможность их сравнения. Анализ частотной зависимости реальной и мнимой частей выражения $3\kappa/4\pi a\mu\beta^2$ для обеих моделей показывает, что обе эти величины имеют полюс при нулевом значении частоты ω, но реальная его часть может иметь также и нуль при некотором реальном значении частоты. Наличие резонанса связывается именно с нулём реальной части обобщённой упругости системы, однако этот нуль, как показывает анализ, возникает не при любых значениях отношения c_l/c_t (например, он ещё отсутствует при $c_l/c_t \approx \sqrt{3}$ — среда Пуассона), а лишь когда указанная дробь превышает величину $c_l/c_t \approx 3$. В этом случае значение корня составляет $\beta \approx 4$ и оно остаётся практически неизменным при возрастающем значении c_l/c_t. Колебательный отклик на гармоническое силовое воздействие вычислен по формулам (1), (2). Соответствующие графики на рис. 1а, б — $c_l/c_t \approx \sqrt{3}$, рис. 2а, б — $c_l/c_t \approx 3$, рис. 3а, б — $c_l/c_t \approx 5$, рис.4а, б — $c_l/c_t \approx 10$ дают частотную зависимость амплитуды колебательного смещения, причём индексом «а» обозначены графики с результатами вычисления по первой из моделей, а результаты вычисления по второй из моделей представлены графиками на рисунках с индексом «б». Из рисунков видно, что в случае сферической неоднородности, у которой выполняется условие проскальзывания на границе, по мере «размягчения» среды на частотной зависимости отклика системы обозначается резонансный пик, связанный с рассматриваемым типом колебаний, который всё более обостряется и выделяется по уровню. Аналогичный переход к случаю всё более водоподобной среды практически не вызывает резонансного отклика, когда имеют место условия вмороженности неоднородности в среду. Таким образом, применение одной из моделей неоднородности, окружённой достаточно мягкой средой, демонстрирует появление собственных колебаний дипольного типа, причём численный расчёт, как видно, позволяет указать и значение соответствующей собственной частоты, совпадение которой с частотой вынужденного воздействия обеспечит условие резонанса в отклике системы. Ширина резонансного отклика характеризует добротность системы, связанную с излучательными потерями. Реально, при наличии дополнительных, диссипативных потерь ширина пика будет несколько большей, чем она представлена на полученных графиках. Ряд экспериментов по исследованию параметров распространения упругих волн в материалах или в искусственных мягких средах, содержащих множественные пустотные монодисперсные неоднородности [3], обнаруживают возможность эффективного гашения упругих колебаний в определённом частотном интервале, связанного, по-видимому, с резонансным рассеянием на неоднородностях рассматриваемого типа. Это подтверждает также предпочтительность выбора в пользу модели проскальзывания, когда неоднородностью, например, является полость с воздушным заполнением.

Оценим значение резонансной частоты и добротности колебаний системы «полость-среда» применительно к некоторым вполне реальным условиям, типичным, например, при проведении разведочных работ, предваряющих подготовку площадки под строительство, когда в приповерхностной зоне грунта могут встретиться полости, связанные с присутствием остатков прежних фундаментов или коммуникационных сетей, т. е. полости техногенной природы. Задаваясь параметрами $a = 0.05...0.1$ м, $c_t = 180$ м/с, из равенства $\beta \cong 4$ получаем $f' \cong 2c_t/\pi a \cong 1.15...2.3$ кГц, т. е. в пустотных полостях в грунте, имеющих радиус $a \approx 5...10$ см, могут возбуждаться собственные колебания дипольного типа с частотами в интервале первых килогерц. Добротность колебаний в такой системе может быть оценена как по ширине полосы, так и по отношению пикового значения к значению на резонансной частоте, принадлежащему сглаживающей кривой, соединяющей начало координат в частотной характеристике вибросейсмического отклика с линией, продолжающей ход кривой сразу за пределами резонансного пика. Так, для графика на рис. 4а упомянутое отношение — это $4.8/1.3 \approx 3.7$, что и даёт оценку добротности $Q^{(1)} \approx 3...4$, характерной для случая мягкой среды, где $c_l/c_t \approx 10$. Основываясь на полученных данных, также возможно прогнозировать резонансные частоты в сейсмическом отклике при сейсмическом зондировании геологических структур верхней части разреза с целью выявления пустотных аномалий естественной, например, карстовой природы в грунтовой толще.

Интересно сравнить найденное значение собственной частоты с аналогичным значением, соответствующим пульсационным, симметричным колебаниям сферической полости, т. е. колебаниям монопольного типа. Известно [2], что резонансная частота сферически симметричных колебаний такой полости даётся соотношением $\omega^* \approx 2c_t / a$, $f^* \approx c_t / \pi a$ т. е. оказывается примерно вдвое ниже, чем у колебаний дипольного типа. При тех же параметрах среды и размерах неоднородности это даст численное значение порядка $0.5...0.6$ кГц. Добротность симметричных колебаний при аналогичном учёте только излучательных потерь даётся как $Q^{(0)} = c_l / 2c_t$, что в нашем случае составит $Q^{(0)} = 5$, т. е. несколько более высокое значение, чем для колебаний дипольной формы.

Наконец, в заключение уместно заметить, что при наличии воздушного заполнения в полости могут возникнуть воздушно-акустические колебания с различными формами симметрии. Обратим внимание только на одну из таких форм, именно, (1, 1) — т. е. с одной вариацией по углу и при отсутствии в полости промежуточных сфер с нулевой колебательной скоростью, которая имеет низшее значение собственной частоты и наиболее близка по форме к исследованным выше колебаниям в окружающей упругой среде. Соответствующее этой форме колебаний значение собственной частоты определяется из условия [4] $2\pi f_{11} a/c = 2.08$, где $c \approx 340$ м/с — скорость звука в воздухе. Отсюда легко установить, что при $a = 0.05...0.1$м значение собственной частоты будет находиться в интервале $f_{11} = 2.25...4.5$ кГц. Видно, что обозначенный частотный интервал очень близок к аналогичному интервалу, куда могут попасть соответствующие значения частот собственных колебаний дипольной формы упругой сферической полости. Следовательно, изложенное выше может рассматриваться как предпосылка того, что при более точном расчёте возможных значений соответствующих частот собственных колебаний в такой совокупной системе, как воздушно заполненная полость в упругой среде, последние будут лежать именно в обозначенных пределах. Вместе с тем, при проведении более корректной процедуры решения задачи о резонансных упругих колебаниях даже самых первых номеров этой полной системы, предполагающей сшивку нормального напряжения в стенке и воздушного акустического давления, а также нормальных компонент колебательной скорости по разные стороны сферической границы, встречаются некоторые вычислительные сложности. Незначительное количество литературных данных о резонансных частотах акустических колебаний в рассмотренной системе, по-видимому, и объясняется этими сложностями.

ВЫВОДЫ

Актуальность проблемы неразрушающего дистанционного контроля материалов, как и геоакустических проблем, связанных с сейсмоакустическим зондированием подземных инженерных сооружений и неоднородностей, вызывает необходимость усовершенствования активных систем звуко- и сейсмоакустического «видения», применяемых при инженерной сейсмической съёмке, дающей представление о геологической структуре, о литологии, о характере и составе аномалий, возможно присутствующих в приповерхностной грунтовой толще на площадке, выбранной под строительство промышленных, энергетических и транспортных сооружений. В этой связи результаты теоретического анализа, полученные в настоящей работе, могут представлять практический интерес, демонстрируя возможность прогноза, а в дальнейшем и рационального выбора рабочего частотного диапазона сейсмоакустических устройств поиска. В качестве обоснования или оптимизации частотного интервала при выявлении естественных и искусственных неоднородностей в грунте предпринят анализ резонансных частот сейсмоакустического отклика, на примере резонанса дипольных колебаний в простейшей маломасштабной идеализированной колебательной системе «полость-грунт». Проведённый анализ, безусловно, не исчерпывает возможности своего дальнейшего развития, например, применительно к ситуации, когда необходим учёт влияния на характер и частоту колебаний полости близко расположенной свободной поверхности грунта. Практический интерес для разведочной, в частности, рудной сейсмики, вероятно, могут представлять аналогичные задачи анализа колебательных характеристик, когда неоднородностью является инородное тело или группа тел, отличающихся от окружающей среды параметрами плотности или упругости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 02-02-17089).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Авербах, В. В. Артельный, Б. Н. Боголюбов, Ю. М. Заславский, В. Д. Кукушкин, А. В. Марышев, Ю. К. Постоенко, В. И. Таланов Сейсмоакустическое зондирование искусственных неоднородностей в грунте // Акустический журнал, 2001, **47**, №4, с. 437–441.
2. М.А.Исакович Общая акустика. М.: Наука, 1973, 450 с.
3. А.В.Ионов Средства снижения вибрации и шума на судах. С.-Петербург.: Изд-во ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 2000, 348 с.
4. С.Н. Ржевкин Курс лекций по теории звука. М.: изд. МГУ, 1960.

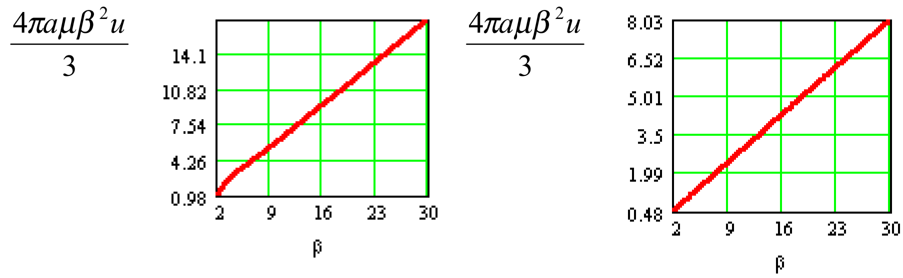

Рис. 1 а, б ($c_l/c_t=\sqrt{3}$)

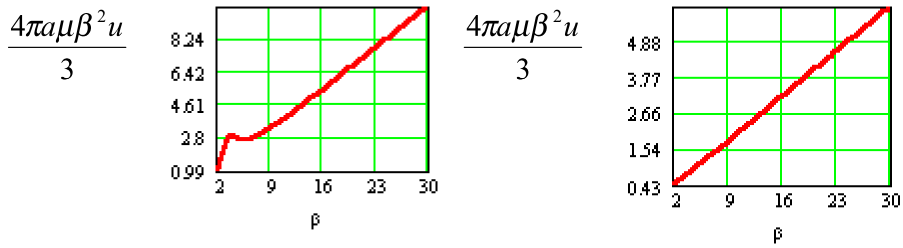

Рис. 2 а, б ($c_l/c_t=3$)

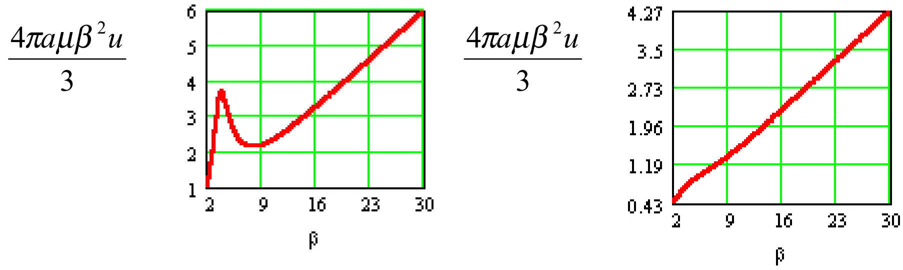

Рис. 3 а, б ($c_l/c_t=5$)

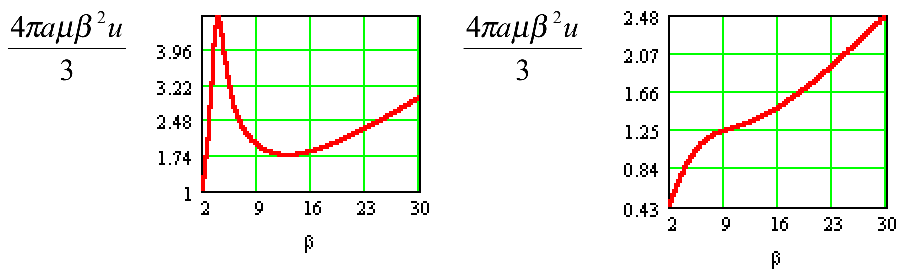

Рис. 4 а, б ($c_l/c_t=10$)

Рис. 1, 2, 3, 4. Частотные зависимости уровня колебательного отклика полости на гармоническое воздействие в случаях различной жёсткости среды (c_l/c_t). Индекс «а» – модель «проскальзывающей» сферы, индекс «б» – модель «вмороженной» сферы