

И. В. Грушецкий, А. В. Смольников

ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова

Россия, 196158, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44, eeaa@online.ru

Применение метода конечных элементов для расчета коэффициентов энергетической связи, используемых в статистическом энергетическом методе, на примере углового соединения балок

Получена 15.04.2004, опубликована 20.05.2004

Представлен способ определения с применением метода конечных элементов (МКЭ) коэффициентов энергетической связи, используемых в статистическом энергетическом методе (ЭМ). При моделировании МКЭ системы, состоящей из двух подсистем, энергия, приходящая в подсистему, удаленную от источника, полностью поглощается. Способ применен для определения коэффициентов энергетической связи двух балок, соединенных под прямым углом. Результаты численного расчета хорошо согласуются с известным аналитическим решением для такого соединения полубесконечных балок. С использованием полученных МКЭ коэффициентов связи энергия колебаний конструкции в виде «лесенки» из четырех балок рассчитана ЭМ (приближенным методом). Эта же конструкция рассчитана МКЭ (точным методом). Получено хорошее совпадение точного и приближенного решений в октавных полосах частот, содержащих не менее двух резонансных частот конструкции.

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее распространенными в современной практике методами расчетов колебаний и звукоизлучения сложных инженерных конструкций являются методы конечных и граничных элементов (МКЭ, МГЭ) и энергетический метод (ЭМ). Энергетический метод часто называют статистическим энергетическим методом (СЭМ), имея в виду особенности допущений при его применении. Эти методы реализованы в виде коммерческих программ: ANSYS, SYSNOISE, ABACUS (МКЭ), AutoSEA, SEAM, SEADS (ЭМ) и др.

МКЭ в принципе является достаточно точным и универсальным методом, поскольку в его основе лежат фундаментальные уравнения теории упругости, но при его использовании возникают проблемы вычислительного характера, когда количество элементов, необходимых для правильного описания конструкции, становится очень большим (особенно для достаточно сложных конструкций с повышением частоты). Поэтому на практике МКЭ применяется обычно на низких частотах, а ЭМ — на средних и высоких.

При расчете ЭМ рассматривается стационарное энергетическое состояние механической системы и составляется баланс энергий, вводимых и поглощенных в системе, а также переходящих из одной подсистемы в другую. При этом используются энергии, усредненные по времени, пространству подсистем (длине, площади, объему) и частотам (просуммированные в полосах частот). Основными преимуществами метода являются его устойчивость к неточности исходных данных и отсутствие необходимости в детальном описании системы. Поэтому он является привлекательным для инженерного расчета звука и вибрации в сложных конструкциях.

Однако ЭМ — принципиально приближенный метод. Кроме того, приближенными являются применяемые в методе коэффициенты энергетической связи между подсистемами, полученные аналитически, в результате решения определенных задач, при постановке которых использованы те или иные допущения. Использование таких коэффициентов ограничено диапазоном частот, в котором справедливы допущения. Поэтому считается, что использование ЭМ, в частности СЭМ, ограничено определенным диапазоном частот, хотя закон сохранения энергии — основа ЭМ — справедлив на любых частотах. Другой недостаток применения аналитических решений для определения коэффициентов связи состоит в том, что зачастую они не учитывают особенностей реальных конструкций, которые могут существенно отличаться от академических моделей. Применение к таким конструкциям известных аналитических решений, очевидно, дает либо весьма приближенные оценки, либо вообще не может быть обосновано.

Указанные недостатки ЭМ не являются препятствием для использования метода на практике, поскольку, во-первых, инженерные расчеты в принципе приближенные, во-вторых, имеются пути для повышения точности расчетов.

Одним из перспективных путей совершенствования ЭМ является использование МКЭ для определения коэффициентов энергетической связи. Для моделирования отдельных связанных подсистем требуется намного меньше конечных элементов, чем для моделирования сложной системы в целом. Поэтому решение МКЭ возможно с использованием «рядового» компьютера вплоть до достаточно высоких частот, где для системы в целом применяется ЭМ. Исследования по использованию МКЭ для определения коэффициентов энергетической связи проводились для соединений пластин (например [1, 2]). В данной работе мы рассмотрим определение коэффициентов энергетической связи на примере соединения балок, причем отличным от [1, 2] способом.

1. ПРИНЦИПИАЛЬНАЯ СХЕМА РАСЧЕТА ЭМ

Основным этапом при реализации ЭМ является построение математической модели конструкции — системы уравнений энергетического баланса (СУЭБ). Матрица СУЭБ описывает потери в элементах конструкции (подсистемах) и механические и акустические связи подсистем. В правой части содержатся колебательные мощности, вводимые в подсистемы. Неизвестными величинами являются звуковая или вибрационная энергия в подсистемах, из которых определяются уровни шума и вибрации. «Классическая» СУЭБ имеет вид

$$\omega \begin{pmatrix} \eta_1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n \eta_{1i} & -\eta_{21} & \cdots & -\eta_{n1} \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n \eta_{2i} & \cdots & -\eta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{1n} & -\eta_{2n} & \cdots & \eta_n + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^n \eta_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — коэффициенты внутренних потерь энергии в подсистемах; $\eta_{12}, \eta_{21}, \dots, \eta_{ni}$ — коэффициенты энергетической связи подсистем; E_1, E_2, \dots, E_n — неизвестные колебательные энергии подсистем; W_1, W_2, \dots, W_n — энергии, вводимые в подсистемы; ω — круговая частота.

Коэффициенты энергетической связи, как указывалось, обычно рассчитываются по аналитическим зависимостям. Однако такие зависимости имеются для ограниченного числа типовых соединений подсистем и не всегда могут быть применены в практических расчетах с уверенностью в приемлемой точности конечного результата. В последнее время предпринимаются попытки рассчитать коэффициенты энергетической связи не аналитически, а численно — с использованием МКЭ [1, 2].

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МКЭ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

Общая схема определения коэффициентов энергетической связи с использованием МКЭ состоит в следующем. Создается конечно-элементная модель подсистем (элементов конструкции), входящих в соединение, коэффициенты связи которых требуется найти. К модели прикладываются внешние силы. Определяются колебательные мощности, вводимые в подсистемы, и смещения (давления) в узлах сетки элементов. По смещениям (давлениям) определяется энергия колебаний подсистем. По известным энергиям и вводимым мощностям определяются коэффициенты энергетической связи, которые используются затем в системе уравнений (1).

При определении таким способом коэффициентов энергетической связи в работе [1] рассматривались изолированные соединения ограниченных пластин с коэффициентами потерь, соответствующими материалу пластин. Система уравнений для определения коэффициентов энергетической связи часто оказывалась плохо обусловленной, а ее решения в значительной степени зависящими от малых изменений свойств подсистем, например, геометрических размеров. Мы рассмотрим и проверим на примере соединения балок способ определения коэффициентов энергетической связи, состоящий в моделировании присоединенной подсистемы — балки, на которую сила не действует, — как полубесконечной. Именно такая модель используется для проведения физических экспериментов по изучению распространения колебательной энергии в

неоднородных конструкциях (например, при исследовании прохождения энергии через препятствия). Для этого в физических экспериментах демпфируют подсистемы, удаленные от возбуждаемой, например, погружают удаленный конец балки или пластины в песок. При моделировании (в расчетах МКЭ) полубесконечная конструкция заменялась конечной, но с высоким коэффициентом внутренних потерь.

Согласно закону сохранения энергии вводимая в систему энергия равна поглощенной:

$$\eta E = W/\omega. \quad (2)$$

Если балка входит в состав какой-либо конструкции (как, например, на рис. 1), то потери энергии колебаний в возбуждаемой балке обусловлены не только внутренними потерями в ней, но и оттоком энергии в присоединенные конструкции. Определяемый из соотношения (2) коэффициент потерь есть сумма коэффициента внутренних потерь (η) и коэффициента потерь, описывающего отток энергии в присоединенные конструкции (коэффициента энергетической связи, η_c). Уравнение энергетического баланса для подсистемы, в которую вводится энергия (балки 1 на рис. 1), имеет вид:

$$(\eta + \eta_c)E = W/\omega. \quad (3)$$

В этом уравнении не учитывается обратный приток энергии из присоединенной подсистемы, т. е. считается, что вся энергия, уходящая из возбуждаемой подсистемы, полностью поглощается в присоединенной подсистеме.

Из уравнения (3) можно найти коэффициент энергетической связи:

$$\eta_c = W/(\omega E) - \eta. \quad (4)$$

3. РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ БАЛОК

Рассмотрим процедуру определения неизвестных коэффициентов связи на примере жесткого Г-образного соединения двух балок, представленного на рис. 1. Длина балки 1 — 1.1 м, балки 2 — 0.9 м; поперечное сечение обеих балок — 1×5 см. Материал балки 2 такой же, как балки 1 (сталь), но имеет высокий коэффициент потерь (0.9). Энергия вводится в балку 1 посредством поперечной силы (в плоскости рисунка). Шарнирная опора соединения введена для упрощения расчетов и анализа результатов: в такой механической системе возникают только поперечные (изгибные колебания).

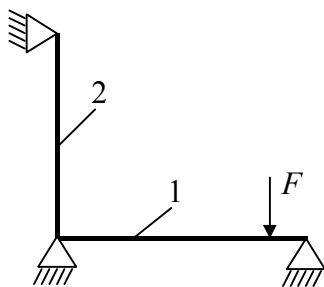


Рис. 1. Угловое соединение балок, в которых возникают только поперечные колебания

При моделировании МКЭ балки разбивались на стандартные балочные элементы длиной 1 см. Энергия колебаний балки и вводимая энергия рассчитывались из комплексных смещений в узлах сетки элементов, полученных в результате решения МКЭ. Энергия поперечных колебаний балки (E) рассчитывалось по формуле

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{n=1}^N M_n \xi_n^2, \quad (5)$$

где ξ_n — амплитуда смещения в узле, M_n — масса балки, приходящаяся на узел, N — число узлов сетки элементов. Поскольку балка однородная и моделируется множеством одинаковых элементов, т. е., масса всех элементов одинакова, то $E = \omega^2 M \bar{\xi}^2 / 2$, M — масса балки, $\bar{\xi}^2$ — усредненный по узлам квадрат модуля смещения.

Мощность, вводимая в балку сосредоточенной силой, определялась по формуле

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(F \cdot v^*), \quad (6)$$

где F — действующая на балку сила (действительное число, задается при моделировании МКЭ, 1 Н), v^* — комплексно-сопряженная колебательная скорость в месте приложения силы. Скорость связана со смещением (ξ), получаемым в результате решения МКЭ, соотношением $v = i\omega\xi$. Поэтому $W = -\omega(F \cdot \operatorname{Im}\xi)/2$. Мнимая часть смещения в точке приложения силы по расчету МКЭ всегда оказывается отрицательной, поэтому вводимая мощность всегда положительна.

Расчеты для одной отдельно взятой балки, возбуждаемой поперечной силой, показали, что коэффициент потерь, определенный из соотношения (2), совпадает с его значением, введенным в качестве исходного данного при моделировании МКЭ, при относительно невысоких значениях коэффициента потерь (менее 0.05). При увеличении коэффициента потерь, введенного в качестве исходного данного, разница между введенным и рассчитанным коэффициентами потерь увеличивается. Причина в том, что в смещениях балки все более заметной становится бегущая составляющая. Поэтому в дальнейших расчетах коэффициент потерь в балке 1 принимался равным 0.01.

Расчеты вводимой мощности и энергии по формулам (5) и (6) выполнялись на резонансных частотах колебаний системы балок, результаты суммировались в октавных полосах частот. В результате автоматической процедуры модального анализа колебаний системы среди этих частот оказывались резонансные частоты не только изгибных, но и продольных колебаний. На резонансных частотах продольных колебаний, которые не возникают в рассматриваемой системе, энергии колебаний балок и вводимые мощности относительно невелики, поэтому вклад этих частот в суммарную энергию в октавных полосах незначителен.

И вводимая энергия, и энергия колебаний, в общем случае, зависят от точки приложения силы. Поэтому расчеты выполнялись при действии силы в двенадцати произвольно взятых точках (узлах), а результаты усреднялись. Результаты расчета по

формуле (4) представлены на рис. 2, количество резонансных частот колебаний системы из двух балок, попадающих в октавные полосы частот, — в таблице 1. Из рис. 2 видно, что результат расчета (η_c) практически не зависит от точки приложения силы, если количество резонансных частот колебаний в октавной полосе три (например, 250 и 500 Гц, табл. 1) и более.

Коэффициент энергетической связи выражается через коэффициент прохождения энергии через соединение балок (τ):

$$\eta_c = \frac{c_g \tau}{\omega L}, \quad (7)$$

где c_g — групповая скорость изгибных волн, L — длина возбуждаемой балки.

Для Г-образного соединения балок коэффициент прохождения энергии через соединение (τ) получен аналитически [3] и составляет 0.5 для балок одинакового поперечного сечения (при этом виброизоляция соединения — 3 дБ). Результаты расчета коэффициента энергетической связи балок по формуле (7) при условии, что $\tau = 0.5$ также представлены на рис. 2, из которого очевидно хорошее совпадение результатов численного и аналитического расчетов.

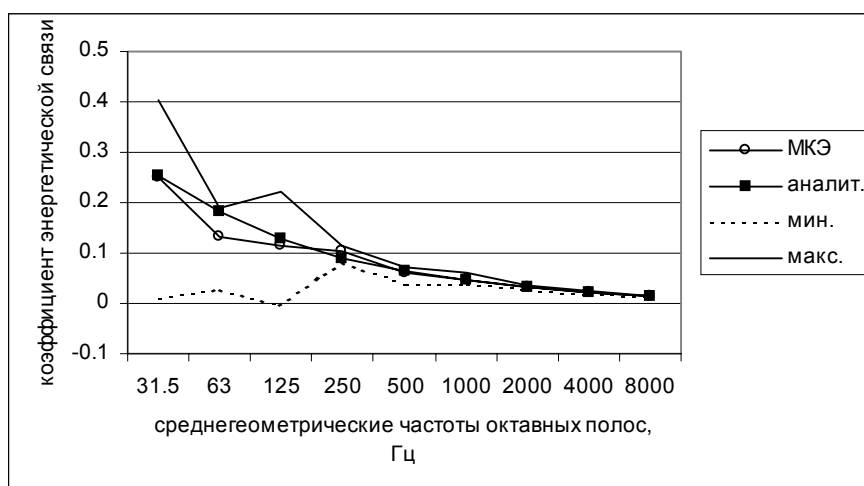


Рис. 2. Коэффициент энергетической связи балок, соединенных под прямым углом (рис. 1), при условии, что энергия, проходящая через соединение в балку 2, полностью поглощается ($\eta_2 = 0.9$), рассчитанный с использованием МКЭ (среднее по 12 точкам приложения силы) и аналитически (при условии, что $\tau = 0.5$), а также минимальные и максимальные значения, полученные МКЭ при приложении силы в 12 разных точках

Таблица 1. Количество резонансных частот колебаний системы из двух балок, попадающих в октавные полосы частот

31.5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000
1	1	1	3	3	5	9	11	19

4. ПРОВЕРКА ПРИМЕНИМОСТИ ЭМ НА ПРИМЕРЕ БАЛОЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Для проверки применимости ЭМ рассчитаем энергию колебаний балок, составляющих конструкцию — «лесенку» из балок с шарнирно опертыми соединениями — представленную на рис. 3. Расчеты выполним ЭМ и МКЭ, который предполагается точным и заменяющим физический эксперимент.

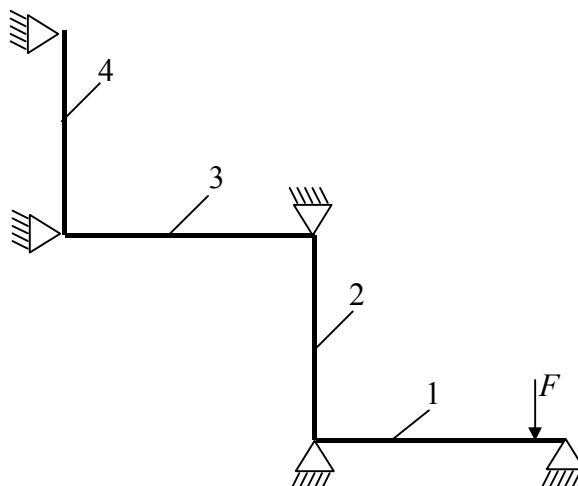


Рис. 3. Конструкция («лесенка») из последовательно соединенных балок, в которых возникают только поперечные колебания

СУЭБ для конструкции, представленной на рис. 3, имеет вид

$$\omega \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_{12} & -\eta_{21} & 0 & 0 \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \eta_{21} + \eta_{23} & -\eta_{32} & 0 \\ 0 & -\eta_{23} & \eta_3 + \eta_{32} + \eta_{34} & -\eta_{43} \\ 0 & 0 & -\eta_{34} & \eta_4 + \eta_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Было обнаружено, что результат расчета МКЭ существенно зависит от незначительного изменения длин балок, составляющих конструкцию. Например, на рис. 4 и 5 представлены энергии (в дБ отн. 10^{-12} Вт) колебаний балок 1 и 4, входящих в «лесенку», в которой балки немного отличаются длиной (табл. 2), а все остальные характеристики балок одинаковы. Разница энергий колебаний балок, одинаково расположенных в составе конструкции, достигает 10 дБ. При этом ЭМ дает примерно одинаковые результаты, не зависящие от длин балок. Для сравнения результатов расчетов МКЭ и ЭМ будем использовать усредненные результаты расчетов МКЭ для трех моделей (вариантов), приведенных в табл. 2.

Таблица 2. Длины балок (м), составляющих «лесенку»

	Балка 1	Балка 2	Балка 3	Балка 4
Вариант 1	1.1	1.05	1.0	0.95
Вариант 2	1.1	1.1	1.1	1.1
Вариант 3	1.1	0.9	1.1	0.9

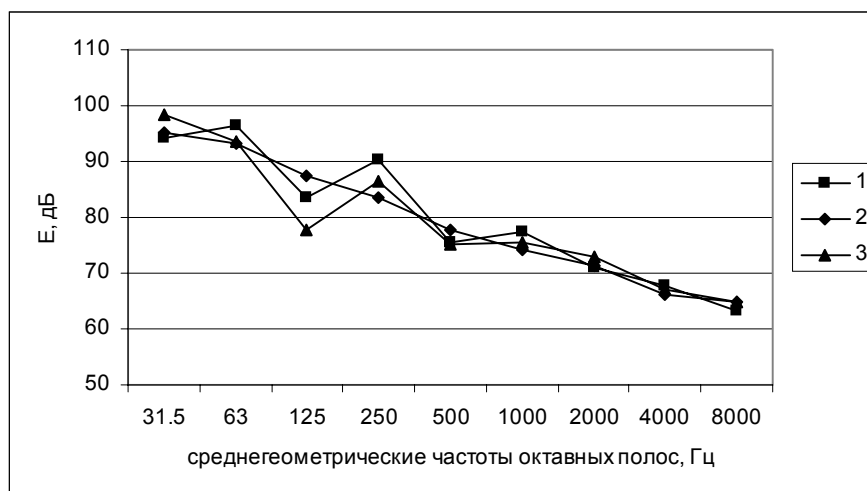


Рис. 4. Энергия колебаний балки 1 для трех вариантов конструкции (расчет МКЭ)

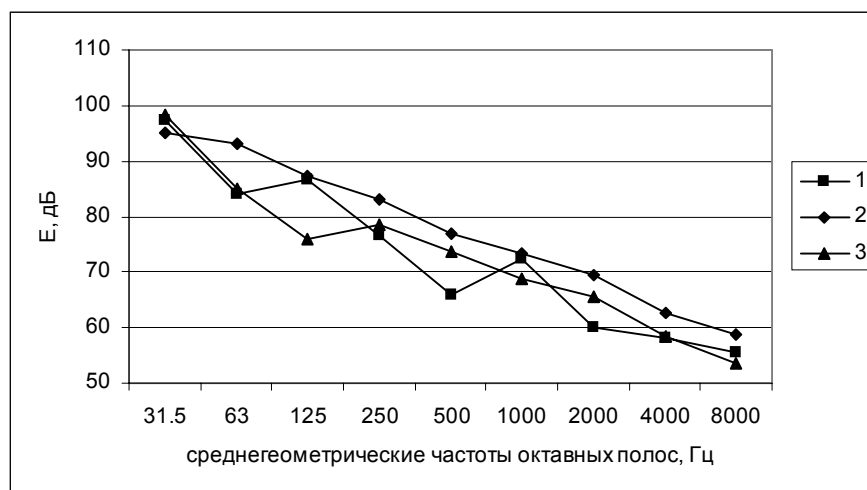


Рис. 5. Энергия колебаний балки 4 для трех вариантов конструкции (расчет МКЭ)

Подобный подход обоснован тем, что в реальных конструкциях геометрические размеры неизвестны с абсолютной точностью, всегда допускается некоторая погрешность изготовления элементов и конструкции в целом. Поскольку любые расчеты дают приемлемые результаты только в случае адекватной расчетной модели, то и при расчете МКЭ модель конструкции должна учитывать возможное отклонение размеров (и других свойств) от их формальных (ожидаемых) значений. Иными словами, любая формально точная модель конструкции не соответствует в точности ее фактическому состоянию. Поэтому результаты отдельного единичного расчета в принципе не могут быть точными применительно к реальной конструкции. Одним из способов повышения точности расчетов является выполнение расчетов МКЭ для некоторого множества моделей одной и той же конструкции, отличающихся геометрическими размерами и свойствами материалов в определенных пределах, с последующим усреднением результатов и указанием их возможного разброса.

На рис. 6 представлены разницы энергий колебаний четырех балок, составляющих «лесенку», полученных точным методом (МКЭ, среднее по трем вариантам конструкции) и приближенно с использованием ЭМ (т. е. разница между точным и приближенным решениями для каждой балки). При расчете ЭМ использовались коэффициенты энергетической связи, определенные из результатов расчета МКЭ колебаний двух балок, как показано выше (см. раздел. 3); вводимая энергия (W_1) также рассчитывалась МКЭ.

На основании полученных данных можно говорить о приемлемой для практики точности приближенного расчета во всем исследованном диапазоне частот. Наблюдается тенденция повышения точности ЭМ с повышением частоты (при увеличении числа резонансных частот конструкции в октавных полосах, см. табл. 3). Абсолютная величина отклонения приближенного решения от точного на частотах до 1000 Гц (в октавных полосах содержится от двух до шести резонансных частот) составляет менее 3 дБ, а на частотах 1000 Гц и выше (в октавных полосах содержится более девяти резонансных частот) — менее 1.5 дБ.

Можно предположить, что использование для анализа большего, чем для трех моделей, объема данных, полученных МКЭ, позволит точнее оценить погрешность и границы применимости ЭМ.

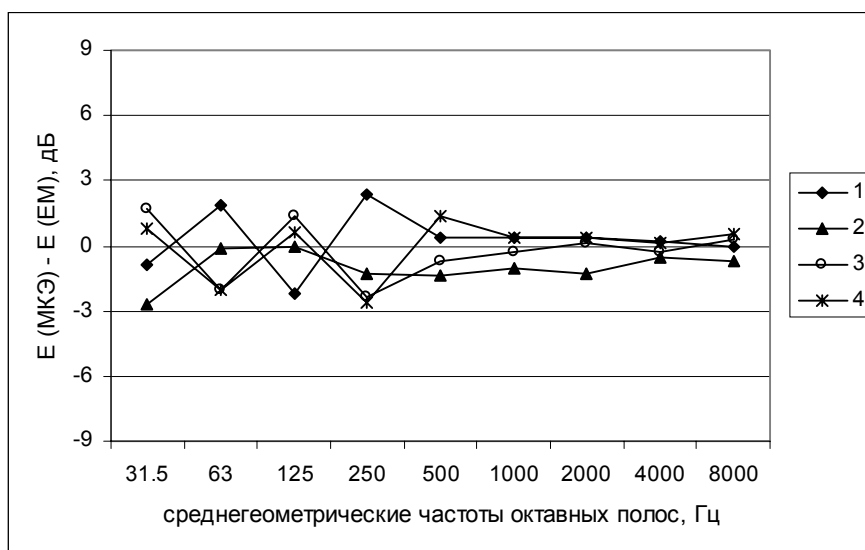


Рис. 6. Разница между точным (МКЭ) и приближенным (ЭМ) решениями для каждой из четырех балок, составляющих конструкцию на рис. 3

Таблица 3. Число резонансных частот, попадающих в октавные полосы

	31.5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000
одна балка	1	—	1	2	1	4	4	7	10
«лесенка»	2	2	3	6	6	9	16	23	33

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен способ определения коэффициентов энергетической связи двух подсистем, состоящий в моделировании системы методом конечных элементов (МКЭ) таким образом, что в подсистеме, удаленной от источника, приходящая энергия полностью поглощается. Способ применен для определения коэффициентов энергетической связи двух соединенных под прямым углом балок. Результаты численного расчета коэффициентов энергетической связи хорошо согласуются с известным аналитическим решением для такого соединения полубесконечных балок.

С использованием полученных МКЭ коэффициентов связи энергетическим методом (ЭМ) рассчитана энергия колебаний конструкции в виде «лесенки» из четырех балок. Эта же конструкция рассчитывалась МКЭ (точным методом). При этом было обнаружено, что на результаты расчета МКЭ существенно влияют незначительные изменения размеров (длины) балок, входящих в конструкцию. Поэтому для сравнения результатов приближенного решения (ЭМ) с точным решением (МКЭ), в качестве последнего использовались усредненные результаты расчетов для трех моделей балочной конструкции («лесенки»), состоящих из балок незначительно отличающихся длиной. Получено хорошее совпадение точного и приближенного решений в октавных полосах частот, содержащих не менее двух резонансных частот конструкции. Абсолютная величина отклонения приближенного решения от точного составила менее 3 дБ. При увеличении числа резонансных частот в полосах наблюдается тенденция к повышению точности приближенного расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Hopkins. Statistical energy analysis of coupled plate systems with low modal density and low modal overlap. JSV. 2002, V. 251, No 2, pp. 193–214.
2. C. Simmons. Structure-borne sound transmission through plate junctions and estimates of SEA coupling loss factors using the finite element method. JSV. 1991, V. 144, pp. 215–227.
3. L. Cremer, M. Heckl, E. E. Ungar. Structure-Borne Sound, 2nd edition, Springer, Berlin, 1988.