

А. М. Гаврилов

*Таганрогский государственный радиотехнический университет
Россия, 347900, Таганрог, пер. Шевченко, 2, e-mail: gavr_am@mail.ru*

Нелинейная дисперсия трехчастотного волнового пакета в бездисперсионной квадратично-нелинейной среде. Теория

Получена 14.08.2005, опубликована 09.09.2005

В рамках метода малых возмущений рассмотрено влияние амплитудно-фазовых соотношений в исходном спектре на распространение узкополосной трехчастотной волны конечной амплитуды в квадратично-нелинейной среде без дисперсии. Показано, что в третьем порядке появляются фазозависимые нелинейные добавки к исходным волнам, приводящие как к изменению фазовой скорости отдельных волн, входящих в волновой пакет, так и к нарушению фазового синхронизма между ними. Отмечена взаимосвязь нелинейных процессов поглощения и дисперсии, получено выражение, описывающее локальное поведение закона дисперсии во втором приближении.

ВВЕДЕНИЕ

Особенности распространения регулярных акустических волн конечной амплитуды (ВКА) в квадратично-нелинейных средах ранее рассматривались на примере гармонических, импульсных, амплитудно-модулированных (АМ) и фазомодулированных (ФМ) сигналов [1–4]. При этом отмечалось, что протяженность области нелинейного взаимодействия для плоских волн определяется дисперсией и диссипативными процессами в среде. В акустических задачах, как правило, физическая дисперсия скорости мала или отсутствует [2, 3], в результате чего все волны, как исходные, так и вторичные, т. е. образовавшиеся в результате нелинейных процессов, перемещаются с одинаковыми скоростями, сохраняя неизменными фазовые соотношения на всем пути распространения. В таких случаях говорят о выполнении условия фазового синхронизма для всех участвующих во взаимодействии волн. В случае малого затухания и достаточно большой амплитуды нелинейные эффекты накапливаются с увеличением пройденного расстояния, что сопровождается значительными искажениями профиля волны вплоть до образования разрывов.

Представленная картина нелинейных процессов в бездисперсионных средах является неполной, поскольку не учитывает влияние фазовых соотношений в спектре исходной волны. Заметим, что в рамках статистической нелинейной акустики [2, 5, 6] неоднократно указывалось на принципиальное различие в постановке задачи о распространении случайных и регулярных ВКА, состоящее в необходимости учета для

последних фазовых соотношений между Фурье-гармониками. Однако, насколько нам известно, на сегодняшний день проблема учета фазовых соотношений при рассмотрении нелинейных волновых процессов в акустике не получила своего развития, несмотря на свою практическую значимость. В частности, это касается использования модулированных волн большой амплитуды в устройствах связи, информационно-измерительных и телекоммуникационных системах с акустическим каналом передачи информации.

Амплитудно-фазовые соотношения в спектре модулированной ВКА играют важную роль в нелинейных процессах, сопровождающих ее распространение [7]. В результате нелинейных процессов могут существенно изменяться условия распространения и самой излученной волны, включая дополнительное ослабление в результате нелинейного затухания [8], а также фазовые соотношения между входящими в ее состав гармониками. Изменение фазовых соотношений связано с проявлением особого вида дисперсии — нелинейной дисперсии [3] и может послужить причиной искажений формы огибающей ВКА. Данная работа посвящена изучению взаимосвязи нелинейной дисперсии с начальными амплитудно-фазовыми соотношениями в спектре модулированной ВКА. Для упрощения выводов рассмотрение задачи ограничено случаем трехчастотного волнового пакета с симметричным частотным спектром ($\omega_0 - \omega_H = \omega_B - \omega_0 = \Omega$), который при произвольных амплитудно-фазовых соотношениях можно рассматривать как амплитудно-фазомодулированную волну [9].

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХЧАСТОТНОГО ВОЛНОВОГО ПАКЕТА КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

На входе среды для узкополосной трехчастотной волны (волнового пакета) граничное условие запишем в виде

$$p(t, x = 0) = P_H \sin(\omega_H t + \varphi_H) + P_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + P_B \sin(\omega_B t + \varphi_B), \quad (1)$$

где P_H , P_0 , P_B и φ_H , φ_0 , φ_B — начальные амплитуды и фазы компонент трехчастотной волны; $\omega_{H,B} = \omega_0 \pm \Omega$, $\Omega \ll \omega_0$.

Используя безразмерные параметры, первое приближение в рамках метода возмущений для распространяющейся в идеальной среде плоской волны запишем в виде решения волнового уравнения

$$P_{(1)}(t, z) = A_H \sin[(1 - \Phi)(\omega_0 t - k_0 z) + \varphi_H] + A_0 \sin(\omega_0 t - k_0 z + \varphi_0) + A_B \sin[(1 + \Phi)(\omega_0 t - k_0 z) + \varphi_B], \quad (2)$$

где $\Phi = \Omega/\omega_0$; $k_0 = \omega_0/c_0$; c_0 — скорость звука в невозмущенной среде; $A_H = P_H/P_0$, $A_0 = P_0/P_0$ и $A_B = P_B/P_0$; P_0 — величина, выбираемая из соображений удобства представления результатов; $P_{(1)} = p/P_0$.

В сопровождающей системе координат выражение (2) принимает вид

$$P_{(1)}(\tau) = A_H \sin[(1 - \Phi)\omega_0\tau + \varphi_H] + A_0 \sin(\omega_0\tau + \varphi_0) + A_B \sin[(1 + \Phi)\omega_0\tau + \varphi_B], \quad (3)$$

где $\tau = (x/c_0 - t)$.

Нелинейную поправку к полю исходной волны (второе приближение), отвечающую за возникновение вторичных волн в области, предшествующей образованию разрыва в волновом профиле, получим из уравнения простых волн [2]:

$$\Delta P(\tau) \cong P(\tau) \frac{\partial P(\tau)}{\partial \tau} \cdot \Delta z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P^2(\tau)}{\partial \tau} \cdot \Delta z, \quad (4)$$

где $z = x/x_p = (x\varepsilon\omega_0 P_0)/(\rho_0 c_0^3)$ — координата, нормированная на расстояние образования разрыва x_p в волне с амплитудой P_0 и частотой ω_0 ; ε — параметр нелинейности среды.

На расстоянии $z \cong \Delta z$ от излучателя результирующее поле ВКА запишется в виде совместно распространяющихся начального возмущения и нелинейной добавки:

$$P(\tau, z) \approx P_{(1)}(\tau) + \Delta P(\tau, z), \quad (5)$$

которая в общем случае учитывает все порядки теории возмущений и может быть записана в виде суммы

$$\Delta P(\tau, z) = \Delta P'(\tau, z) + \Delta P''(\tau, z) + \dots \quad (6)$$

Нахождение поправки второго порядка $\Delta P'(\tau, x)$ сводится к подстановке в (4) выражения (3) для исходной волны $P(\tau, x) = P_{(1)}(\tau) + \Delta P'(\tau, x)$; при нахождении поправки третьего порядка следует подстановка в (4) суммы $P(\tau, x) = P_{(1)}(\tau) + \Delta P'(\tau, x)$ и т. д. Нарастиванием числа слагаемых в (6) можно учесть появление нелинейных компонент спектра все более высоких порядков, в том числе и нелинейную добавку к исходной волне, т. е. реакцию ВКА на распространение в нелинейной среде. Если после указанных преобразований подставить полученное выражение в (5), то получим общий спектр ВКА, включающий появившиеся в процессе распространения комбинационные частоты, гармоники и нелинейные добавки к исходным волнам. Последующий анализ каждой в отдельности Фурье-компоненты позволяет определить степень ее зависимости от амплитудных и фазовых соотношений в исходной волне.

Аналогичный результат получаем из частного решения уравнения простых волн для трехчастотной ВКА в виде неявно заданной функции

$$P(\tau, z) = A_H \sin[(1 - \Phi)(\omega_0\tau + zP) + \varphi_H] + A_0 \sin(\omega_0\tau + zP + \varphi_0) + A_B \sin[(1 + \Phi)(\omega_0\tau + zP) + \varphi_B], \quad (7)$$

если записать его в виде степенного ряда по малому приращению координаты $z \cong \Delta z$:

$$P(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot P_z^{(n)}(\tau, 0) \cdot z^n = P_{(1)}(\tau) + \Delta P(\tau, z). \quad (8)$$

Аналогично выражению (5) первый и последующие члены ряда (8) представляют исходную волну $P_{(1)}(\tau)$ и нелинейную добавку $\Delta P(\tau, z)$, характеризующую все вторичные волны и поправку к исходной волне:

$$P_z^{(0)}(\tau, 0) = P_{(1)}(\tau);$$

$$\Delta P(\tau, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} P_z^{(n)}(\tau, 0) \cdot z^n = \Delta P'(\tau, z) + \Delta P''(\tau, z) + \dots; \quad (9)$$

$$P_z^{(1)}(\tau, 0) \cdot z = \Delta P'(\tau, z); \quad \frac{1}{2} P_{zz}^{(2)}(\tau, 0) \cdot z^2 = \Delta P''(\tau, z) \text{ и т. д.}$$

Чтобы выявить механизм влияния амплитудно-фазовых соотношений на распространение трехчастотной ВКА и проследить качественную картину происходящих процессов, достаточно в выражениях (8) и (9) ограничиться рассмотрением нелинейных добавок к исходным волнам, появляющихся благодаря поправке $\Delta P''(\tau, z)$ в спектре третьего порядка:

$$\Delta P_H(\tau, z) = -\frac{z^2}{8} \{A_H [A_H^2(1-\Phi)(1+2\Phi) + 2A_B^2(1-3\Phi-2\Phi^2) + 2A_0^2(1-\Phi)] \times$$

$$\times \sin[(1-\Phi)\omega_0\tau + \varphi_H] + A_B A_0^2(1-3\Phi) \cdot \sin[(1-\Phi)\omega_0\tau + \varphi_H - 2\beta_0]\} = \quad (10)$$

$$= -\frac{z^2}{8} \Delta P_H \sin[(1-\Phi)\omega_0\tau + \varphi_H + \Delta\varphi_H] = \Delta P_{1H}(\tau, z) + \Delta P_{2H}(\tau, z);$$

$$\Delta P_B(\tau, z) = -\frac{z^2}{8} \{A_B [A_B^2(1+\Phi)(1-2\Phi) + 2A_H^2(1+3\Phi-2\Phi^2) + 2A_0^2(1+\Phi)] \times$$

$$\times \sin[(1+\Phi)\omega_0\tau + \varphi_B] + A_H A_0^2(1+3\Phi) \cdot \sin[(1+\Phi)\omega_0\tau + \varphi_B - 2\beta_0]\} = \quad (11)$$

$$= -\frac{z^2}{8} \Delta P_B \sin[(1+\Phi)\omega_0\tau + \varphi_B + \Delta\varphi_B] = \Delta P_{1B}(\tau, z) + \Delta P_{2B}(\tau, z);$$

$$\Delta P_0(\tau, z) = -\frac{z^2}{8} A_0 \{ \{A_H^2 [3 - (2\Phi - 1)^2] + A_B^2 [3 - (2\Phi + 1)^2] + A_0^2 \} \cdot \sin(\omega_0\tau + \varphi_0) +$$

$$+ 2A_H A_B (1 - 2\Phi^2) \cdot \sin(\omega_0\tau + \varphi_0 + 2\beta_0) \} = -\frac{z^2}{8} \Delta P_0 \sin(\omega_0\tau + \varphi_0 + \Delta\varphi_0) = \quad (12)$$

$$= \Delta P_{10}(\tau, z) + \Delta P_{20}(\tau, z).$$

Поправки более высоких порядков уточняют закономерности, описываемые выражениями (10) – (12), но в силу малости, по крайней мере, на начальном этапе распространения ($z \ll 1$) их вкладом можно пренебречь. В диссипативной среде это допущение остается справедливым и на больших расстояниях, если $Re_0 \leq 1$ (Re_0 — акустическое число Рейнольдса исходного возмущения). В полученных выражениях

параметр $\beta_0 = [(\varphi_H + \varphi_B)/2 - \varphi_0]$ представляет собой комбинацию начальных фаз ($z = 0$) компонент, входящих в волновой пакет, и называется фазовым инвариантом [10]. В бездисперсионной среде его величина не зависит от времени и проходимого расстояния, однозначно характеризуя фазовые соотношения в спектре одномерной трехчастотной волны малой амплитуды.

2. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Отрицательный знак перед правой частью в выражениях (10) – (12) в общем случае отражает отток энергии из первичных волн, идущей на образование вторичных волн. Нетрудно убедиться, что первое слагаемое ΔP_1 в выражениях $\Delta P(\tau, z)$ находится в противофазе к исходной волне $P(0)$ при любых амплитудно-фазовых соотношениях, отражая фазонезависимое нелинейное затухание, вызванное самовоздействием и взаимодействием волн. Фаза второго слагаемого ΔP_2 в (10) – (12) определяется начальной величиной фазового инварианта β_0 , рис. 1. Пунктиром показаны траектории (окружности) перемещения конца вектора, характеризующие изменение комплексных амплитуд компонент пакета на расстоянии z в зависимости от начального значения фазового инварианта.

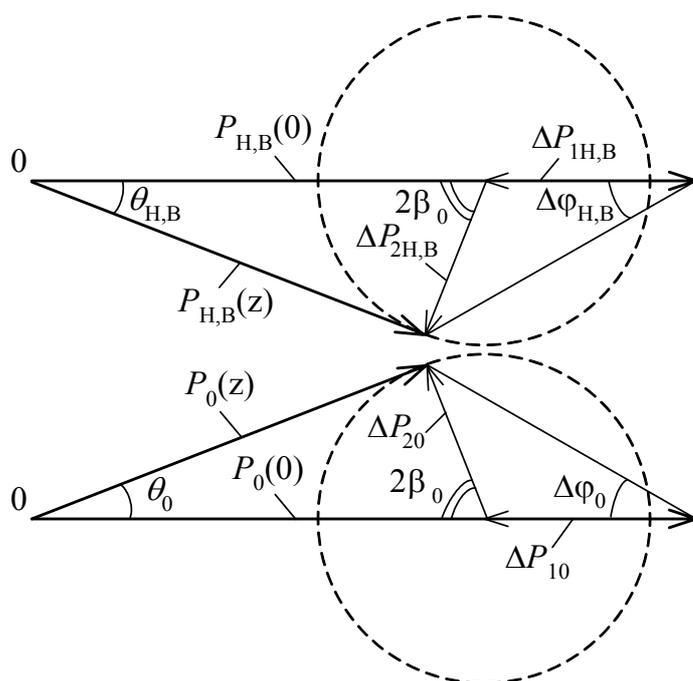


Рис. 1. Геометрическая интерпретация влияния фазовых соотношений на распространение компонент трехчастотного волнового пакета

При $\beta_0 = 0$ обе части нелинейной добавки синфазны между собой, создавая условия для максимального проявления нелинейного затухания исходных волн. В случае $\beta_0 = \pi/2$ вектора ΔP_1 и ΔP_2 противофазны, что отражает присутствие двух конкурирующих между собой нелинейных процессов — затухания и усиления. В результате этого ослабление исходных волн в процессе распространения оказывается

наименьшим. Нетрудно убедиться, что при любых начальных параметрах выполняется условие $\Delta P_1 > \Delta P_2$. Идентичность изменений амплитуд добавок у различных компонент волнового пакета при $\beta_0 = 0$ и $\beta_0 = \pi/2$ приводят, соответственно, к усилению или замедлению общего оттока энергии из волнового пакета во вторичные волны, а не к перераспределению энергии между исходными волнами. При $\beta_0 = 0, \pi/2$ и π для всех компонент пакета выполняется условие $\Delta\varphi = 0$, что соответствует синхронному распространению нелинейных добавок и исходных волн.

При $\beta_0 = \pi/4$ исходные волны и фазозависимые части их нелинейных добавок находятся в квадратуре. Как следует из рис. 1, при $\beta_0 \approx \pi/4$ нелинейные набег фаз θ достигают своего максимального значения. Заметим, что знаки фазовых набегов центральной (θ_0) и боковых компонент пакета (θ_H, θ_B) противоположны при одинаковых значениях β_0 , см. (10) – (12). Это приводит к взаимной расфазировке (нарушению фазового синхронизма) волн, входящих в волновой пакет.

В отличие от амплитуд фазы нелинейных добавок ($\Delta\varphi_H, \Delta\varphi_B, \Delta\varphi_0$) не зависят (в рамках третьего приближения) от расстояния. Следовательно, пространственные распределения нелинейных набегов фаз ($\theta_H, \theta_0, \theta_B$) определяются изменяющимися с расстоянием соотношениями амплитуд исходных волн $P(0)$ и их нелинейных добавок $\Delta P(\tau, z)$. Помимо начального значения фазового инварианта β_0 амплитуды и фазы добавок $\Delta P_H, \Delta P_B$ и ΔP_0 в выражениях (10) – (12) зависят от параметра

$$k = \frac{k_H}{k_B} = \frac{A_H/A_0}{A_B/A_0} = \frac{A_H}{A_B},$$

описывающего асимметрию амплитуд боковых компонент, и коэффициента амплитудной модуляции m , характеризующего соотношение амплитуд центральной и боковых компонент волнового пакета:

$$m = 2 \frac{\sqrt{P_H P_B}}{P_0} = 2 \cdot \frac{\sqrt{A_H A_B}}{A_0} = 2 \cdot \sqrt{\frac{A_H}{A_0} \cdot \frac{A_B}{A_0}} = 2 \cdot \sqrt{k_H k_B},$$

где $k_H = A_H/A_0, k_B = A_B/A_0$.

Таким образом, изменением фазовых (β_0) и амплитудных (k, m) соотношений в спектре начального возмущения можно влиять на условия распространения трехчастотного волнового пакета. При этом фазозависимые нелинейные процессы сопровождаются, во-первых, изменением амплитуд (нелинейное затухание); во-вторых, появлением (при $\beta_0 \neq 0$ и $\pi/2$) и последующим ростом дополнительных набегов фаз θ в каждой из компонент и, в-третьих, увеличивающейся с расстоянием взаимной расфазировкой компонент.

На рис. 2(а, б) приведены амплитудно-фазовые (АФХ) и фазовые (ФХ) характеристики нелинейных добавок, рассчитанные из (10) – (12) для условия равных амплитуд боковых компонент ВКА ($A_H = A_B, A_0 = 1$) и различных значений m . АФХ и ФХ представляют собой зависимости амплитуд и фаз нелинейных добавок компонент волнового пакета от начальной величины фазового инварианта.

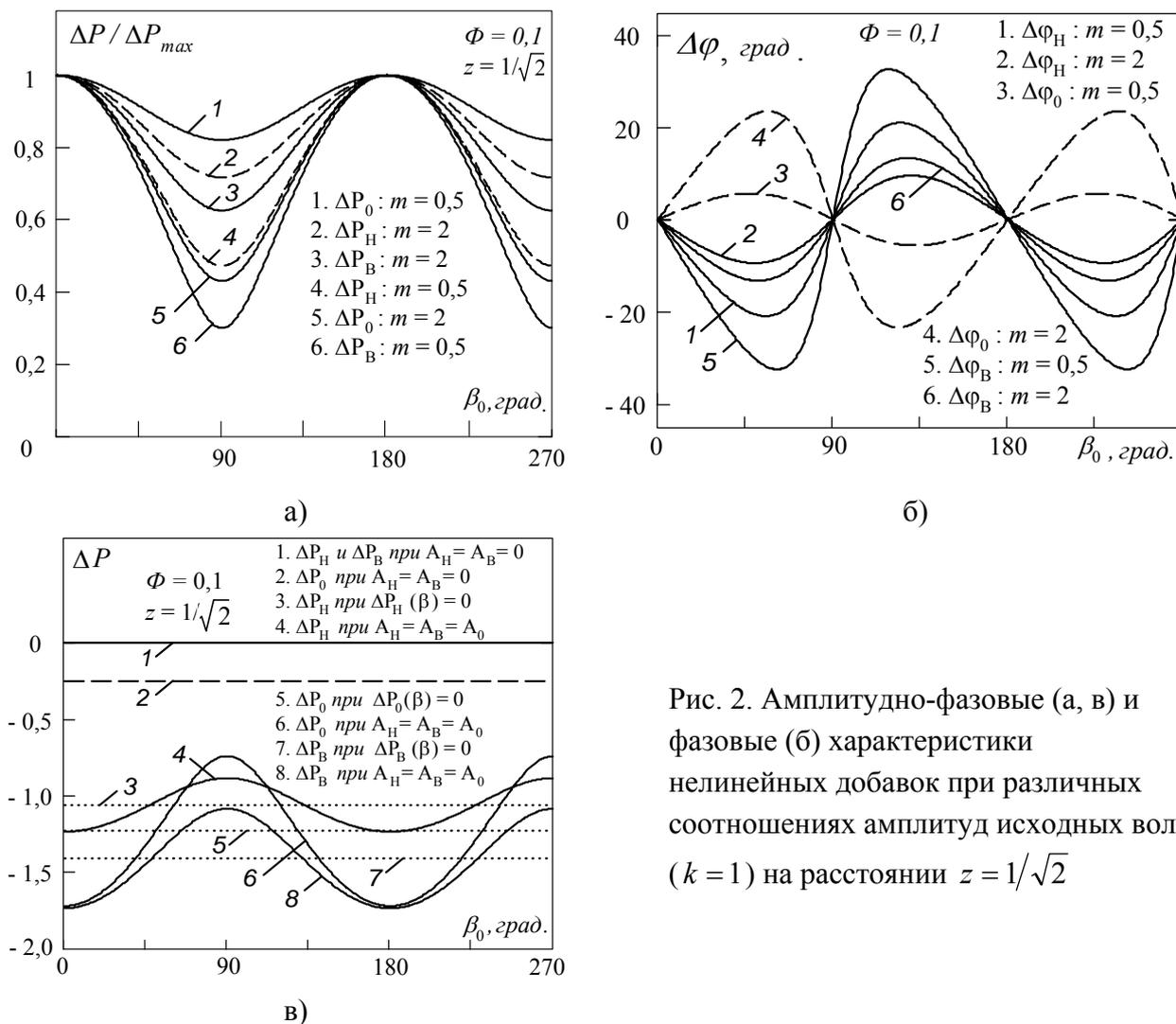


Рис. 2. Амплитудно-фазовые (а, в) и фазовые (б) характеристики нелинейных добавок при различных соотношениях амплитуд исходных волн ($k = 1$) на расстоянии $z = 1/\sqrt{2}$

Для определения механизма фазовой зависимости нелинейного затухания рассмотрим структуру нелинейных добавок $\Delta P_H, \Delta P_B$ и ΔP_0 , рис. 2в, которую представим как сумму вкладов, вносимых различными нелинейными процессами:

- потери из-за самовоздействия гармонических компонент, происходящие в результате образования высших гармоник;
- потери за счет взаимодействия рассматриваемой компоненты с другими компонентами и вторичными волнами, которые, в свою очередь, делятся на фазозависимые и независимые от фазового инварианта.

Номерами 1 и 2 на рис. 2в обозначены соответственно ΔP_H , ΔP_B и ΔP_0 при $A_H = A_B = 0$ ($m = 0$), когда в среду излучается только волна с частотой ω_0 . Очевидно, что в этом случае добавка образуется только на частоте излучаемой волны. Номерами 3, 5 и 7 показаны значения нелинейных добавок при $A_H = A_B = A_0$, содержащие вклады, обусловленные самовоздействием волн и взаимодействием их между собой, но без учета фазозависимой составляющей — второго слагаемого в выражениях (10) – (12), содержащего под знаком синуса фазовый инвариант.

Кривые 4, 6 и 8 описывают зависимости ΔP_H , ΔP_0 и ΔP_B с учетом всех входящих в них составляющих. Прямые 3, 5 и 7 являются фактически средними линиями кривых 4, 6 и 8, относительно которых величины нелинейных добавок могут увеличиваться ($\beta = 0$) или уменьшаться ($\beta_0 = \pi/2$) за счет фазозависимой составляющей. Подбором фазового инварианта можно добиться и таких условий, когда ее влияние на амплитуду нелинейной добавки не проявляется (точки пересечения зависимостей 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8). Таким образом, благодаря фазозависимым составляющим ΔP_H , ΔP_0 и ΔP_B потери волн в нелинейной среде могут изменяться в достаточно широких пределах как в сторону увеличения, так и уменьшения.

Возвращаясь к представлению волнового пакета конечной амплитуды в виде степенного ряда (8), каждую из компонент с точностью до третьего приближения можно записать в виде

$$\begin{aligned} P_H(\tau, z) &= P_H \sin[(1 - \Phi)\omega_0\tau + \varphi_H] - \frac{z^2}{8} \Delta P_H \sin[(1 - \Phi)\omega_0\tau + \varphi_H + \Delta\varphi_H] = \\ &= P_H(z) \cdot \sin[(1 - \Phi)\omega_0\tau + \varphi_H + \theta_H(z)]; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} P_B(\tau, z) &= P_B \sin[(1 + \Phi)\omega_0\tau + \varphi_B] - \frac{z^2}{8} \Delta P_B \sin[(1 + \Phi)\omega_0\tau + \varphi_B + \Delta\varphi_B] = \\ &= P_B(z) \cdot \sin[(1 + \Phi)\omega_0\tau + \varphi_B + \theta_B(z)]; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} P_0(\tau, z) &= P_0 \sin(\omega_0\tau + \varphi_0) - \frac{z^2}{8} \Delta P_0 \sin(\omega_0\tau + \varphi_0 + \Delta\varphi_0) = \\ &= P_0(z) \cdot \sin[\omega_0\tau + \varphi_0 + \theta_0(z)]. \end{aligned} \tag{15}$$

В рамках оговоренных допущений выражения (13) – (15) позволяют рассмотреть пространственные изменения параметров трехчастотной волны на начальном этапе ее распространения, где еще не успели образоваться вторичные волны со спектрами выше третьего. На рис. 3 приведены зависимости от пройденного расстояния амплитуд и нелинейных набегов фаз каждой из компонент волнового пакета, обусловленные нелинейностью среды, при различных значениях β_0 . Поведение одноименных характеристик качественно согласуется для всех рассматриваемых волн и отражает влияние фазовых соотношений при неизменном начальном амплитудном спектре ($A_H = A_B = A_0$).

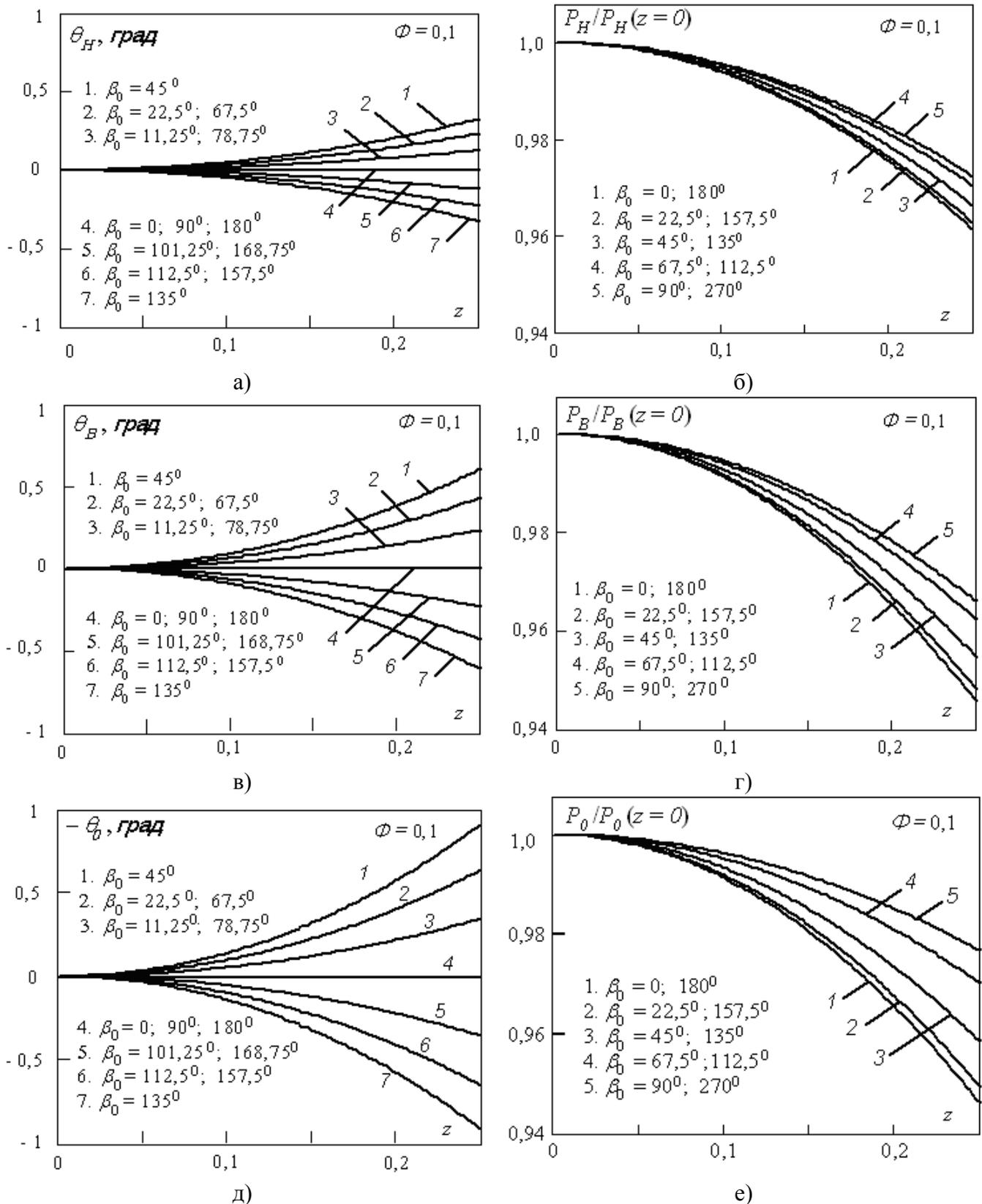


Рис. 3. Пространственные изменения фаз ($\theta_H, \theta_B, \theta_0$) и амплитуд (P_H, P_B, P_0) исходных волн при $A_H = A_B = A_0$, обусловленные нелинейностью среды

3. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИСПЕРСИЯ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ

Влияние амплитудно-фазовых соотношений на условия распространения волнового пакета в идеальной квадратично-нелинейной среде без дисперсии можно учесть, записав для волнового числа отдельных компонент ($\omega_{H,0,B}$) выражение

$$k(\omega_{H,0,B}) = \frac{\omega_{H,0,B}}{c_0} [1 + \delta'(\omega_{H,0,B}) + i\delta''(\omega_{H,0,B})],$$

где действительный $\delta'(\omega_{H,0,B})$ и мнимый $i\delta''(\omega_{H,0,B})$ члены определяют соответственно нелинейную дисперсию фазовой скорости и нелинейное поглощение, которые могут быть связаны между собой соотношениями, следующими из принципа причинности аналогично формулам Крамерса-Кронига в электродинамике.

При $\beta_0 = 0, \pi/2$ и π все компоненты волнового пакета распространяются, не испытывая дополнительных набегов фазы, рис 3(а, в, д). Это равносильно тому, что их фазовые скорости равны скорости звука в невозмущенной среде c_0 . Положительные набег фаз $\theta_{H,B}$ и отрицательные набег θ_0 при $0 < \beta_0 < \pi/2$, а также отрицательные набег $\theta_{H,B}$ и положительные θ_0 при $\pi/2 < \beta_0 < \pi$, можно рассматривать как распространение монохроматических волн с фазовой скоростью, зависящей от пройденного расстояния:

$$\begin{aligned} c_{\phi_i}(z) &= \frac{c_0}{1 - \theta'_{z_i}(z) \cdot c_0 / \omega_i} = c_0 \left[1 + \frac{c_0 \cdot \theta'_{z_i}(z) / \omega_i}{1 - c_0 \cdot \theta'_{z_i}(z) / \omega_i} \right] \approx \\ &\approx c_0 \left[1 + \frac{c_0}{\omega_i} \cdot \theta'_{z_i}(z) \right] = c_0 + \Delta c_{\phi_i}(z), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\omega_i = \omega_{H,0,B}$; $\theta_i(z)$ — пространственное распределение нелинейного набег фазы i -й волны; $\theta'_{z_i}(z) = d[\theta_i(z)]/dz$; $\Delta c_{\phi_i}(z)$ — нелинейная добавка к фазовой скорости.

Наибольшие отклонения скорости от равновесного значения имеют место при $\beta_0 \approx \pm \pi/4$, что соответствует максимальным значениям нелинейных набегов фаз θ_H, θ_B и θ_0 , рис. 1. Появляющаяся добавка к скорости $\Delta c_{\phi_i}(z)$ никак не связана с изменением физических свойств самой среды и имеет в своей основе векторный механизм сложения двух коллинеарно распространяющихся волн с одинаковыми частотами — исходной волны и нелинейной добавки к ней. Заметим, что при этом исходные волны (спектр 1-го порядка) и нелинейные добавки к ним (из спектра 3-го порядка) распространяются в среде не только с одной и той же скоростью c_0 , но и с неизменной в рамках третьего приближения разностью фаз ($\Delta\varphi_H, \Delta\varphi_B, \Delta\varphi_0$).

Часто на практике приходится измерять нелинейные фазовые набег на фиксированном расстоянии x от излучателя. В этом случае для определения среднего

значения фазовой скорости $\bar{c}_{\phi_i}(x)$ на интервале $(0;x)$ можно воспользоваться следующей оценкой:

$$\bar{c}_{\phi_i}(x) \approx c_0 \left[1 + c_0 \frac{\theta_i(x)}{x\omega_i - c_0\theta_i(x)} \right] \approx c_0 \left[1 + \frac{c_0}{x\omega_i} \cdot \theta_i(x) \right].$$

Рост абсолютных значений фазовых набегов θ_H, θ_B и θ_0 с расстоянием обусловлен увеличением амплитуд нелинейных добавок на начальном участке распространения волнового пакета. Стабилизация и последующее ослабление нелинейных процессов в результате диссипации или сферического расхождения (в пучке) волн ограничивают этот рост, не приводя к исчезновению нелинейного набега фаз. Однажды возникнув, фазовый сдвиг остается в волне и после прекращения нелинейных процессов.

На рис. 3(б, г, е) приведены пространственные распределения амплитуд компонент волнового пакета при различных начальных значениях фазового инварианта. Наблюдаемые различия обусловлены фазозависимой нелинейной добавкой, рис. 2в. Экспериментальные исследования пространственных распределений амплитуд, проводившиеся для трехчастотной ВКА при $\beta_0 = 0$ и $\beta_0 = \pi/2$ [9], подтверждают полученные результаты.

АФХ компонент на рис. 4 рассчитаны с использованием выражений (9) – (12) и отражают нарастающее с расстоянием влияние фазозависимых нелинейных процессов по мере того, как увеличиваются амплитуды вторичных волн. Наличие у приведенных характеристик минимумов ($\beta_0 = 0$) и максимумов ($\beta_0 = \pi/2$) указывает на то, что фазовые соотношения могут, как замедлять, так и усиливать откачку энергии из исходных волн во вторичные волны.

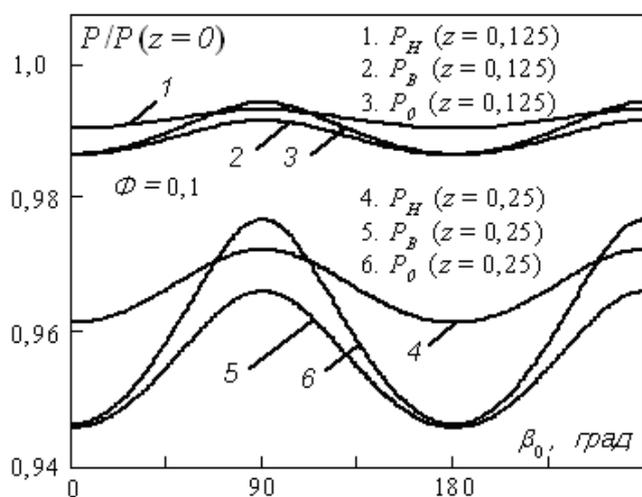


Рис. 4. АФХ компонент волнового пакета на различных расстояниях от излучателя ($A_H = A_B = A_0$)

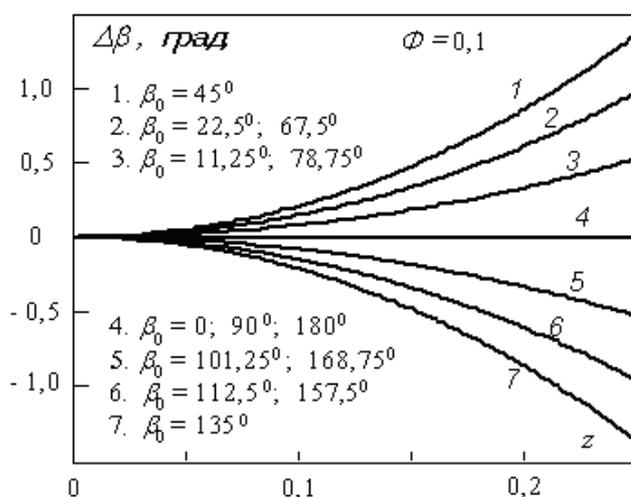


Рис. 5. Пространственное изменение ФИ волнового пакета при различных его начальных значениях ($A_H = A_B = A_0$)

4. НАРУШЕНИЕ ФАЗОВОГО СИНХРОНИЗМА. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИСПЕРСИЯ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ

Волновая расстройка

$$\Delta k(z) = \frac{k_H(z) + k_B(z)}{2} - k_0(z)$$

и фазовый инвариант трехчастотной волны связаны в каждой точке вдоль направления распространения через (16) соотношением

$$\Delta k(z) = \frac{d[\Delta\beta(z)]}{dz} = \Delta\beta'_z(z), \tag{17}$$

которое при $\Delta\beta'_z(z) \neq 0$ описывает нарушение фазового синхронизма между гармоническими компонентами волнового пакета, т. е. их взаимную расфазировку. Пространственное изменение фазового инварианта

$$\Delta\beta(z) = \frac{\theta_H(z) + \theta_B(z)}{2} - \theta_0(z), \tag{18}$$

на рис. 5 является следствием изменений фазовых соотношений между компонентами [10] при распространении в бездисперсионной среде с квадратичной нелинейностью. Из зависимостей $\theta_{H,B,0}(z)$ и $\Delta\beta(z)$, следует, что неизменными фазовые скорости и фазовые соотношения остаются только в случае $\beta_0 = 0, \pi/2, \pi$.

Для оценки влияния дисперсии при распространении узкополосных сигналов достаточно знать не полный закон дисперсии $k(\omega)$, а его локальное поведение [3] в окрестности средней частоты волнового пакета $\omega = \omega_0$:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} \cdot (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_{\omega_0} \cdot (\omega - \omega_0)^2 + \dots \tag{19}$$

Наличие дисперсии учтем в выражении (2) через зависящие от пройденного расстояния дополнительные фазовые набеги $\theta(x)$ и зависящие от координаты волновые числа $k(x)$:

$$\begin{aligned} P(t, x) &= A_H(z) \sin[\omega_0 t - k_H x + \theta_H(x) + \varphi_H] + A_0(x) \sin[\omega_0 t - k_0 x + \theta_0(x) + \varphi_0] + \\ &+ A_B(x) \sin[\omega_B t - k_B x + \theta_B(x) + \varphi_B] = \\ &= A_H(z) \sin[\omega_0 t - k_H(x) \cdot x + \varphi_H] + A_0(x) \sin[\omega_0 t - k_0(x) \cdot x + \varphi_0] + \\ &+ A_B(x) \sin[\omega_B t - k_B(x) \cdot x + \varphi_B]. \end{aligned} \tag{20}$$

Тогда пространственное распределение фазового инварианта можно записать

$$\beta(x) = \beta_0 + \Delta\beta(x) = \beta_0 + \left[\frac{\theta_H(x) + \theta_B(x)}{2} - \theta_0(x) \right]; \tag{21}$$

$$\beta(x) = \beta_0 - \Delta k(x) \cdot x = \beta_0 - x \left[\frac{k_H(x) + k_B(x)}{2} - k_0(x) \right]. \tag{22}$$

Учитывая узкополосность сигнала ($\omega_0 \gg \Omega$), разложим в ряд величины $k_H(x)$ и $k_B(x)$ в окрестности частоты ω_0 , ограничившись первыми четырьмя членами

$$k_H(x) = k_0(\omega_0, x) + \frac{dk(\omega_0, x)}{d\omega}(\omega_H - \omega_0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2k(\omega_0, x)}{d\omega^2}(\omega_H - \omega_0)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3k(\omega_0, x)}{d\omega^3}(\omega_H - \omega_0)^3 + \dots =$$

$$= k_0(\omega_0, x) - \frac{dk(\omega_0, x)}{d\omega}\Omega + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2k(\omega_0, x)}{d\omega^2}\Omega^2 - \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3k(\omega_0, x)}{d\omega^3}\Omega^3 + \dots; \tag{23}$$

$$k_B(x) = k_0(\omega_0, x) + \frac{dk(\omega_0, x)}{d\omega}\Omega + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2k(\omega_0, x)}{d\omega^2}\Omega^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3k(\omega_0, x)}{d\omega^3}\Omega^3 + \dots \tag{24}$$

Подстановкой (23) и (24) в (22) приходим к равенству

$$\Delta\beta(x) = \beta(x) - \beta_0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2k(\omega_0, x)}{d\omega^2}\Omega^2 x,$$

откуда следует выражение для дисперсионного параметра [10], характеризующего квадратичное приближение теории дисперсии

$$D(\omega_0, x) = \frac{d^2k(\omega_0, x)}{d\omega^2} \cong -2 \left[\frac{\Delta\beta(x)}{\Omega^2 x} \right]_{\Omega \rightarrow 0}. \tag{25}$$

Вычитая (23) из (24), ограничившись тремя членами разложения,

$$k_B(x) - k_H(x) = 2 \frac{dk(\omega_0, x)}{d\omega} \cdot \Omega = (k_B - k_H) - \frac{\theta_B(x) - \theta_H(x)}{x},$$

получим коэффициент в линейном члене разложения $k(\omega)$

$$\frac{dk(\omega_0, x)}{d\omega} = \frac{1}{v_{ГР}(x)} \approx \frac{1}{c_0} - \left[\frac{\theta_B(x) - \theta_H(x)}{2\Omega x} \right]_{\Omega \rightarrow 0} = \frac{1}{c_0} - \left[\frac{\Delta\theta_{BH}(x)}{2\Omega x} \right]_{\Omega \rightarrow 0}, \tag{26}$$

являющийся обратной величиной групповой скорости волнового пакета. Окончательно выражение для групповой скорости можно записать в виде

$$v_{ГР} \approx c_0 \left[1 + c_0 \frac{\Delta\theta_{BH}(x)}{2\Omega x - c_0 \cdot \Delta\theta_{BH}(x)} \right]_{\Omega \rightarrow 0} \approx c_0 \left[1 + c_0 \frac{\Delta\theta_{BH}(x)}{2\Omega x} \right]_{\Omega \rightarrow 0}. \tag{27}$$

При переходе к пределу при $\Omega \rightarrow 0$

$$v_{ГР} = c_0 \left[1 + c_0 \cdot \frac{\partial\theta(x)/\partial\omega}{x - c_0 \cdot \partial\theta(x)/\partial\omega} \right] = c_0 \left[1 + c_0 \cdot \frac{\theta'_\omega(x)}{x - c_0 \cdot \theta'_\omega(x)} \right] \approx c_0 \left[1 + \frac{c_0}{x} \theta'_\omega(x) \right] \tag{28}$$

ее величина определяется производной по частоте $\theta'_\omega(x)$ нелинейной добавки к фазо-частотной характеристике спектра волнового пакета. В терминах теории сигналов величина $\theta'_\omega(x)$ есть ни что иное, как групповое время запаздывания, которая в нашем

случае является функцией координаты. Зависимости $\Delta\theta_{BH}(x)$ в выражениях (26) и (27), рассчитанные из (13) – (15), показаны на рис. 6. В зависимости от начального значения фазового инварианта β_0 скорость распространения огибающей волнового пакета быть как больше, так и меньше скорости звука в невозмущенной среде c_0 .

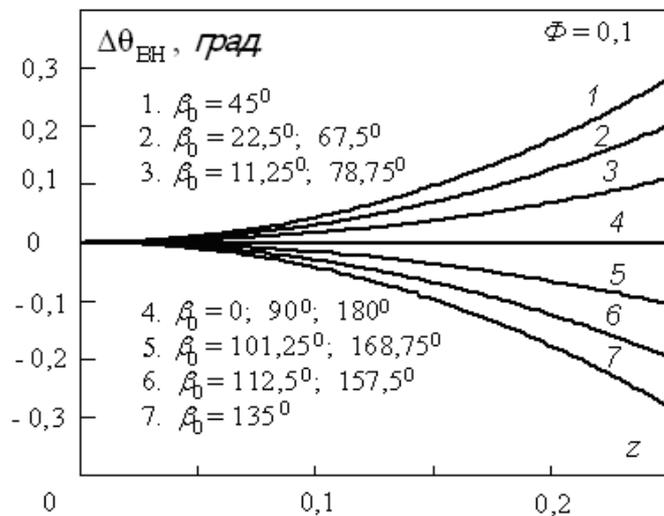


Рис. 6. Пространственное изменение разности фаз боковых компонент (ω_H, ω_B) волнового пакета при различных начальных значениях фазового инварианта $(A_H = A_B = A_0)$

С учетом (25) и (26) закон нелинейной дисперсии во втором приближении для трехчастотного волнового пакета принимает вид

$$k(\omega, x) \approx k(\omega_0, x) + \left[\frac{1}{c_0} - \frac{\Delta\theta_{BH}(x)}{2\Omega x} \right]_{\Omega \rightarrow 0} \cdot (\omega - \omega_0) - \left[\frac{\Delta\beta(x)}{\Omega^2 x} \right]_{\Omega \rightarrow 0} \cdot (\omega - \omega_0)^2,$$

где $\Delta\theta_{BH}(x)$ и $\Delta\beta(x)$ могут быть измерены экспериментально или рассчитаны с использованием более точных моделей. Амплитуда волнового пакета во втором приближении теории дисперсии [3] описывается уравнением параболического типа

$$\frac{\partial A}{\partial x} = D_d \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2},$$

с мнимым коэффициентом диффузии $D_d = -i/2D$, который характеризует дисперсию групповой скорости, приводящей к изменению как амплитудного профиля (форма огибающей), так и фазовой модуляции высокочастотного заполнения волнового пакета. В работе [10] показано, что при распространении в среде с постоянным дисперсионным параметром волна с амплитудной модуляцией постепенно трансформируется в волну с фазовой модуляцией, которая в дальнейшем превращается в АМ волну, после чего процесс повторяется. В нашем случае из-за пространственной зависимости величины дисперсионного параметра изменения в волновом пакете не будут иметь регулярный характер и постепенно прекратятся по мере ослабления нелинейных процессов из-за диссипации и дифракционного расхождения. Как видно из рис. 6, изменением начального значения фазового инварианта можно задавать как величину, так и знак дисперсионного параметра: $D < 0$ при $0 < \beta_0 < \pi/2$ и $D > 0$ при $\pi/2 < \beta_0 < \pi$.

Можно провести формальную аналогию между нелинейной дисперсией групповой скорости и физической дисперсией в линейных средах, приняв во внимание, что первая имеет фазозависимый характер (относительно β_0), а в основе второй лежит частотная зависимость фазовой скорости. В основу сравнения положим зависимости потерь и скорости от частоты (в случае линейных сред) или фазового инварианта (для квадратично-нелинейной среды). В линейных средах частотные зависимости поглощения и фазовой скорости не могут быть произвольными, поскольку связаны между собой фундаментальным принципом причинности [2, 3]. Так, в области частот аномальной дисперсии фазовой скорости ($dc_\phi/d\omega > 0$) волна испытывает избыточное поглощение, причем наибольшие потери имеют место на частоте, где производная скорости по частоте максимальна. В области нормальной дисперсии ($dc_\phi/d\omega < 0$) поглощение имеет квадратичную частотную зависимость. В квадратично-нелинейной среде потери из-за нелинейного затухания принимают максимальное значение при $\beta_0 = 0$ и π , где имеет место $\partial v_{гр}/\partial\beta_0 = \max > 0$. В диапазоне изменения $0 < \beta_0 < \pi/4$ и $3\pi/4 < \beta_0 < \pi$, где $\partial v_{гр}/\partial\beta_0 > 0$, фазозависимые нелинейные процессы приводят к дополнительному ослаблению волн по сравнению с фазонезависящим нелинейным затуханием, рис. 2в, что можно рассматривать как проявление «аномальной» дисперсии групповой скорости. Наоборот, для диапазона $\pi/4 < \beta_0 < 3\pi/4$ справедливо соотношение $\partial v_{гр}/\partial\beta_0 < 0$ и происходит уменьшение нелинейного затухания, что в рамках традиционной терминологии можно отнести на счет «нормальной» дисперсии групповой скорости.

Настоящая работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию РФ (грант № 04-3.20-479).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ влияния амплитудно-фазовых соотношений на распространение трехчастотной ВКА в квадратично-нелинейной среде без дисперсии, несмотря на использование упрощенной модели, позволяет в рамках единого подхода проследить как уже известные результаты, так и получить новые закономерности, требующие экспериментальной проверки. Использование метода малых возмущений ограничивает область применимости полученных характеристик, поэтому приведенные оценки следует рассматривать в качестве предварительных результатов. Однако, используемый подход позволил максимально упростить решение задачи, исключив из рассмотрения ряд факторов, неизбежно присутствующих в эксперименте (диссипация, дифракция неоднородных волн и др.), но мешающих анализу получаемых решений.

Как следует из материалов работы, в бездисперсионной среде с квадратичной нелинейностью имеет место взаимозависимость нелинейных процессов и амплитудно-фазовых соотношений в спектре узкополосной волны. Здесь не только нелинейные процессы зависят от начального амплитудно-фазового спектра волнового пакета, но и

амплитудно-фазовые соотношения изменяются в результате нелинейных процессов. В рамках используемого подхода прослеживается возникновение нескольких видов дисперсии: изменение фазовых скоростей отдельно взятых гармонических волн, изменение фазовых соотношений (нарушение фазового синхронизма) между компонентами волнового пакета, дисперсия групповой скорости.

Существенным отличием нелинейной дисперсии в квадратично-нелинейных средах является ее зависимость от фазовых соотношений в спектре исходной волны, что связано с ее появлением в результате взаимодействия нескольких волн различных частот. Из сопоставления $P(\beta_0, z)$ и $\theta(\beta_0, z)$ видно, что распространение волнового пакета сопровождается двумя взаимосвязанными процессами — энергообменом волн между собой и нелинейной дисперсией, отражая общую связь дисперсии и поглощения (в данном случае нелинейного) в рамках известного принципа причинности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М., Наука, 1966, 520 с.
2. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975, 288 с.
3. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., Наука, 1990, 432 с.
4. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика. Л., Судостроение, 1981, 264 с.
5. Руденко О. В. Взаимодействие интенсивных шумовых волн. УФН, 1986, № 149, вып. 3, с. 413–447.
6. Красильников В. А., Крылов В. В. Введение в физическую акустику. М., Наука, 1984, 400 с.
7. Гаврилов А. М., Медведев В. Ю. Экспериментальное исследование взаимосвязи исходного спектра и нелинейных процессов в волнах конечной амплитуды. Известия ТРТУ, Таганрог, Изд-во ТРТУ, 2003, № 6 (35), с. 11–17.
8. Гаврилов А. М., Медведев В. Ю. Способ уменьшения нелинейного поглощения при распространении акустических волн конечной амплитуды. Сб. трудов X школы-семинара акад. Л. М. Бреховских «Акустика океана» и XIV сессии Российского Акустического общества. М., 2004, с. 61–64.
9. Гаврилов А. М., Медведев В. Ю. О влиянии амплитудно-фазового спектра на нелинейное распространение трехчастотной волны. Физическая акустика. Распространение и дифракция волн. Сборник трудов XIII сессии Российского акустического общества, т. 1. М., ГЕОС, 2003, с. 130–133.
10. Зверев В. А. Модуляционный метод измерения дисперсии ультразвука. Акуст. ж., 1956, т. 2, № 2, с. 142–145.