

А. М. Гаврилов, Р. О. Ситников

Таганрогский государственный радиотехнический университет  
Россия, 347900, Таганрог, пер. Шевченко, 2, e-mail: [gavr\\_am@mail.ru](mailto:gavr_am@mail.ru)

## Нелинейная дисперсия трехчастотного волнового пакета в бездисперсионной квадратично-нелинейной среде. Эксперимент

Получена 14.08.2005, опубликована 09.09.2005

Экспериментально исследуются условия распространения узкополосной трехчастотной волны (волнового пакета) конечной амплитуды с симметричным частотным спектром и произвольными соотношениями начальных амплитуд и фаз. На примере пресной воды показано, что в процессе распространения каждая Фурье-компонента волнового пакета приобретает дополнительный набег фаз, обусловленный их нелинейным взаимодействием между собой. Из полученных зависимостей рассчитаны дисперсионные характеристики: изменения фазовых скоростей отдельных гармонических компонент, групповой скорости волнового пакета и дисперсионного параметра. Отмечается, что проявление нелинейной дисперсии напрямую зависит от величины фазового инварианта трехчастотной волны, представляющего собой линейную комбинацию начальных фаз гармонических волн в составе волнового пакета. Показано, что изменением фазового инварианта можно влиять как на величину, так и на знак дисперсии; отмечены условия, при которых удастся исключить ее проявление. Рассмотрены экспериментальная установка, метод и условия измерений нелинейных набегов фаз. Получено качественное согласие расчетных и экспериментальных результатов.

### ВВЕДЕНИЕ

В общем случае задача дистанционной передачи информации связана с использованием неоднородных в пространстве и времени (модулированных) волн, в которых один или несколько параметров изменяются во времени [1]. В рамках технических приложений акустики такие волны находят применение в работе информационно-измерительной аппаратуры, устройств телеметрии, управления и связи, использующих передачу данных по акустическому каналу. В том случае, когда волна остается близкой к гармонической, изменяемыми параметрами для передачи полезного сигнала могут быть ее амплитуда, частота и фаза.

Основным ограничением для увеличения дальности и (или) скорости передачи модулированных сигналов является частотная дисперсия фазовой скорости, приводящая в процессе распространения к «расплыванию» формы (огибающей) из-за взаимного запаздывания (расфазировки) входящих в пакет гармонических волн.

Однако и в средах без частотной дисперсии, как показано в [2], подобные процессы могут иметь место для волн конечной амплитуды (ВКА), если эти среды обладают нелинейностями нечетных порядков (третьего, пятого и т. д.). Появляющуюся при этом зависимость фазовой скорости от амплитуды волны принято называть нелинейной дисперсией. В основе амплитудно-зависимой дисперсии в средах с нечетной нелинейностью лежат процессы самовоздействия ВКА. Поскольку подавляющее большинство сред в акустике имеют квадратичную нелинейность (вода, воздух и др.), то до последнего времени считалось, что в них нелинейная дисперсия отсутствует, и фазовый синхронизм между волнами разных частот сохраняется на всем пути их распространения [2]. Справедливость этого утверждения следует из многочисленных результатов изучения узкополосных бигармонической (балансно-модулированной), амплитудно-модулированной (АМ) и фазомодулированной (ФМ) ВКА, проводившихся в рамках исследования т. н. параметрических излучающих антенн [2, 3].

Однако, теоретический анализ плоской трехчастотной ВКА с симметричным частотным спектром показал [4], что начальные фазовые соотношения между входящими в ее состав волнами разных частот существенно влияют на распространение в квадратично-нелинейной среде, приводя, в том числе, и к появлению нелинейной дисперсии. Граничное условие для этой задачи можно записать в виде

$$\begin{aligned} p(t, x=0) &= P_H \sin(\omega_H t + \varphi_H) + P_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + P_B \sin(\omega_B t + \varphi_B) = \\ &= P(t) \cdot \sin[\omega_0 t + \varphi_0 + \varphi(t)], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $(P_H, P_0, P_B)$ ,  $(\varphi_H, \varphi_0, \varphi_B)$  и  $\omega_{H,B} = \omega_0 \mp \Omega$ ,  $\omega_0$ , ( $\omega_0 \gg \Omega$ ) — начальные значения амплитуд, фаз и частоты отдельных компонент волнового пакета;  $P(t)$  — огибающая узкополосного сигнала;  $\varphi(t)$  — функция, описывающая фазовую модуляцию высокочастотного заполнения. Аналитические выражения  $P(t)$  и  $\varphi(t)$  для общего случая соотношений начальных амплитуд и фаз приведены в [5].

Важно отметить, что в отличие от сред с нечетной нелинейностью в основе физического механизма нелинейной дисперсии квадратично-нелинейных сред лежат уже не эффекты самовоздействия, а взаимодействие волн различных частот между собой. Образующиеся при этом нелинейные добавки в общем случае произвольных  $\varphi_H$ ,  $\varphi_0$  и  $\varphi_B$  отличаются по фазе от равных с ними по частоте исходных волн, поскольку наследуют фазы тех волн, которые принимали участие в их образовании. При векторном сложении с нелинейной добавкой каждая из исходных волн приобретает дополнительный фазовый набег, который рассматривается как результат изменения фазовой скорости, т. е. проявление нелинейной дисперсии.

Среди полученных в [4] результатов особое место занимает тот факт, что балансно-модулированная ( $P_0 = 0$ ), амплитудно-модулированная ( $\varphi(t) = 0$ ) и фазомодулированная ( $P(t) = \text{const}$ ) ВКА, будучи частными случаями трехчастотной

волны, действительно распространяются в квадратично-нелинейной среде без проявления нелинейной дисперсии. Как показано в рамках метода малых возмущений, такое поведение обусловлено синфазностью исходных волн с их нелинейными добавками и имеет место только в случае перечисленных типов волн. Таким образом, сделанный ранее вывод об отсутствии нелинейной дисперсии в квадратично-нелинейных средах носит частный характер и не отражает общей картины происходящих при распространении трехчастотной (многочастотной) ВКА процессов.

На примере трехчастотной ВКА с симметричным частотным спектром ( $\omega_{H,B} = \omega_0 \mp \Omega$ ) [4, 5] показано, что нелинейные процессы зависят не от абсолютных значений начальных или полных набегов фаз, а определяются их соотношением, т. е. фазовым инвариантом (ФИ)  $\beta_0 = [(\varphi_H + \varphi_B)/2 - \varphi_0]$  [6]. Использование ФИ имеет важное преимущество перед другими способами описания фазового спектра, поскольку, с одной стороны, сокращается количество параметров волны, а, с другой, - его величина для одномерных волн в линейной бездисперсионной среде не зависит от времени и проходимого волной расстояния. Это позволяет описывать изменение фазового спектра трехчастотной волны, используя лишь один параметр. В частности, нетрудно показать, что при симметрии амплитуд в спектре ( $P_H = P_B < P_0$ ) АМ и ФМ сигналы отличаются между собой только величиной фазового инварианта, который в этих случаях равен соответственно  $\beta_0 = 0$  и  $\beta_0 = 90^\circ$ .

Несмотря на широкое использование модулированных волн до настоящего времени в акустике отсутствует экспериментальное подтверждение как самого факта проявления нелинейной дисперсии в квадратично-нелинейных средах, так и ее зависимость от фазовых соотношений спектре волны. Учитывая ограниченность результатов теоретического анализа рамками малых расстояний от излучателя [4], актуальным является проведение экспериментального исследования этого вопроса с целью проверки полученных теоретических выводов.

При постановке эксперимента принималось во внимание, что ожидаемые нелинейные набеги фаз, а, следовательно, и изменения фазовых скоростей у частотных компонент волнового пакета, весьма малы. Были опробованы различные подходы, предпочтение отдано фазовым методам измерения относительных изменений фазовой скорости гармонической волны благодаря их высокой чувствительности. При этом проводились прямые измерения дополнительного фазового набега и зависимости его от ФИ в каждой из гармонических компонент  $\theta(\beta_0)$  волнового пакета. Проверка нелинейного происхождения фиксируемых набегов фазы заключалась в проведении измерений поочередно в режимах малой и большой амплитуд излучаемой волны. В первом случае из-за малости нелинейных эффектов дополнительные набеги фаз отсутствуют. Для исключения нелинейного режима работы приемного тракта экспериментальной установки сигнал на ее входе поддерживался в пределах линейного участка динамического диапазона. Весь объем проведенных измерений выполнен в условиях бегущих волн, что обеспечивалось импульсным режимом излучения.

## 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Для экспериментальных исследований нелинейной дисперсии трехчастотного волнового пакета разработана лабораторная установка, структурная схема которой приведена на рис. 1. Одним из условий реализации используемого метода измерений является частотная селекция компонент, входящих в волновой пакет. Сложность этой операции вызвана близостью входящих в волновой пакет частот ( $\omega_H \leq \omega_0 \leq \omega_B$ ).

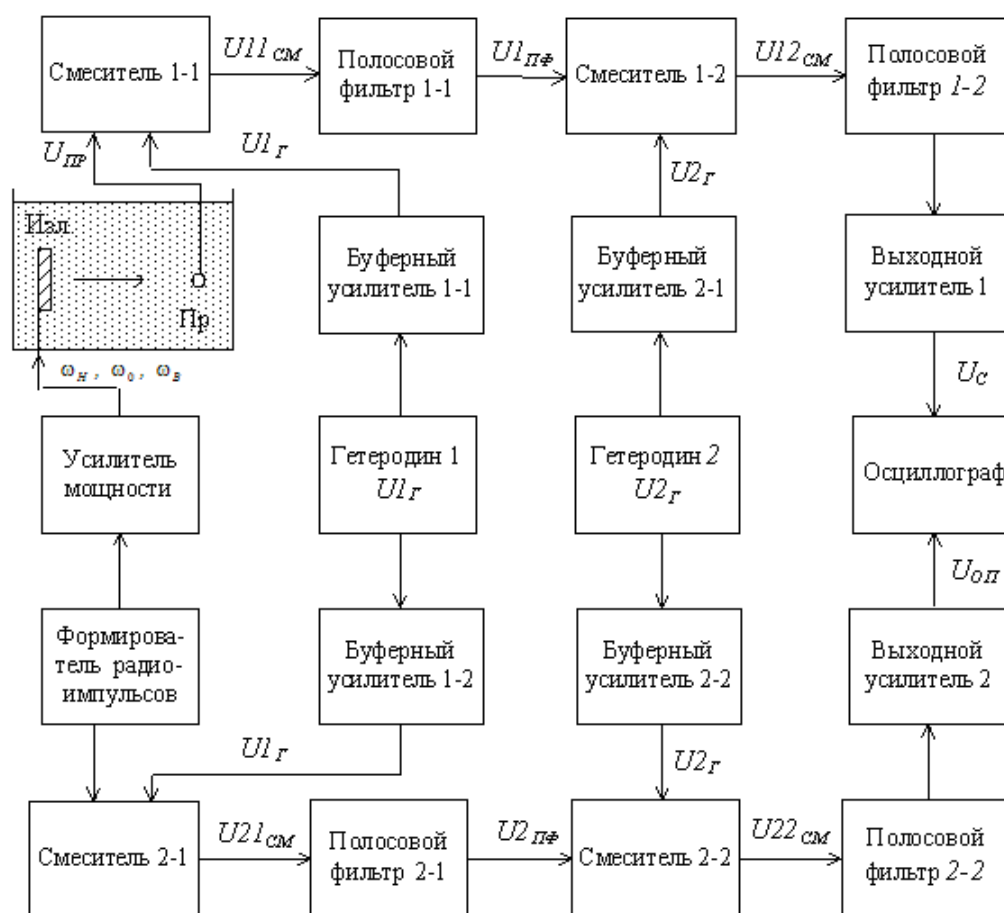


Рис. 1. Структурная схема измерительной установки

Выделение нужной компоненты и последующее измерение в ней нелинейного набега фазы осуществлялось с использованием двух идентичных селективных усилителей, выполненных по схеме двойного преобразования частоты. Это позволило, во-первых, достичь высокой избирательности, и, во-вторых, осуществлять селекцию изменением частоты одного из гетеродинов (гетеродин 1), отказавшись от создания набора фильтров, настроенных на каждую из частот  $\omega_H$ ,  $\omega_0$  и  $\omega_B$ . В рассматриваемых измерениях избирательность двухканального приемно-усилительного тракта составила 10 кГц и определялась полосой пропускания полосовых LC-фильтров (фильтры 1-2 и 2-2), подключенных к выходам вторых преобразователей частоты в каждом из каналов

(смесители 1-2 и 2-2). При необходимости полосу пропускания можно было уменьшать до 1 кГц, используя вместо LC-фильтров кварцевые фильтры.

На вход первого канала подавался принятый гидрофоном акустический сигнал  $U_{пр}$  в виде радиоимпульсов с трехчастотным заполнением, прошедший расстояние между излучателем (Иzl.) и приемником (Пр.). При этом на вход второго канала с выхода формирователя излучаемого сигнала поступает непрерывный трехчастотный сигнал, выступающий в роли опорного  $U_{оп}$  и имеющий те же частоты и амплитудно-фазовые соотношения, что и излучаемый в воду. Для сохранения когерентности опорного и принятого сигналов в процессе двукратного преобразования их частот использованы общие для обоих каналов гетеродины (гетеродины 1 и 2).

В состав измерительной установки вошли излучающий тракт (формирователь радиоимпульсов с трехчастотным заполнением, линейный усилитель мощности, пьезокерамический излучатель), приемный тракт (гидрофон, двухканальный селективный усилитель), набор стандартной измерительной аппаратуры (частотомеры, фазометр, осциллографы), гидроакустический бассейн с координатными устройствами для излучателя и приемника акустических волн. Метод формирования трехчастотного сигнала с произвольными фазовыми соотношениями в спектре рассмотрен в [7].

При преобразовании частоты принятого акустического и опорного сигналов нестабильность частот и фаз обоих гетеродинов не оказывают влияния на соотношение частот и разность фаз напряжений  $U_C$  и  $U_{оп}$  на выходах приемного тракта. Поскольку оба канала всегда настроены на прием одной и той же частоты ( $\omega_1 = \omega_2$ ), что достигается идентичностью полосовых фильтров (1-1 и 2-1, 1-2 и 2-2), то частоты выходных сигналов также оказываются равными ( $\omega_C = \omega_{оп}$ ). Это условие открывает возможность для проведения фазовых измерений. Если предположить, что на входы усилительных каналов поступают сигналы с частотами и начальными фазами соответственно  $(\omega_1, \varphi_1)$  и  $(\omega_2, \varphi_2)$ , то для частот и фаз этих сигналов при прохождении первого и второго смесителей можно записать следующие соотношения:

$U_{11_{CM}} :$	$\omega_{CM11} = \omega_1 + \omega_{Г1} ;$	$\varphi_{CM11} = \varphi_1 + \varphi_{Г1} ;$
$U_C = U_{12_{CM}} :$	$\omega_C = \omega_{CM12} = \omega_{CM11} - \omega_{Г2} =$ $= \omega_1 + \omega_{Г1} - \omega_{Г2} ;$	$\varphi_C = \varphi_{CM12} = \varphi_{CM11} - \varphi_{Г2} =$ $= \varphi_1 + \varphi_{Г1} - \varphi_{Г2} ;$
$U_{21_{CM}} :$	$\omega_{CM21} = \omega_2 + \omega_{Г1} ;$	$\varphi_{CM21} = \varphi_2 + \varphi_{Г1} ;$
$U_{оп} = U_{22_{CM}} :$	$\omega_{оп} = \omega_{CM22} = \omega_{CM21} - \omega_{Г2} =$ $= \omega_2 + \omega_{Г1} - \omega_{Г2} ;$	$\varphi_{оп} = \varphi_{CM22} = \varphi_{CM21} - \varphi_{Г2} =$ $= \varphi_2 + \varphi_{Г1} - \varphi_{Г2} .$

Из приведенных выражений видно, что разность фаз  $\Delta\varphi$  между сигналами  $U_C$  и  $U_{оп}$  не зависит от начальных фаз гетеродинов и определяется набегам фаз в акустическом и электрическом трактах установки:

$$\Delta\varphi = \varphi_C - \varphi_{оп} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (2)$$

Важно, что изменение частот  $\omega_{Г1}$  и  $\omega_{Г2}$  в результате дрейфа и других причин способно повлиять на абсолютные значения частот  $\omega_C$  и  $\omega_{оп}$ , не нарушая при этом их равенства. Следует отметить присутствие случайной составляющей в измеряемой величине  $\Delta\varphi$ , которая вызвана кратковременной нестабильностью частот гетеродинов и обусловлена различием фазо-частотных характеристик усилительных каналов. Для снижения случайной составляющей  $\Delta\varphi$  в качестве гетеродинов использованы цифровые генераторы, обладающие повышенной стабильностью частоты.

Зависимости  $\Delta\varphi_0(\beta_0)$ ,  $\Delta\varphi_H(\beta_0)$  и  $\Delta\varphi_B(\beta_0)$  для каждой из Фурье-компонент волнового пакета измерялись с использованием осциллографа, работающего в режиме внешней синхронизации непрерывным сигналом  $U_{оп}$ , когда на его  $Y$ -вход подан импульсный сигнал  $U_C$ . Начальное значение фазового инварианта  $\beta_0$  изменялось с помощью фазовращателя, находящегося в формирователе, в пределах от  $-180^\circ$  до  $+180^\circ$ . В процессе измерений регистрировалось смещение нулевых переходов принятого гидрофоном сигнала по временной развертке осциллографа с последующим пересчетом в угловые единицы.

Усилитель мощности, выполненный по двухтактной схеме, работает в линейном режиме, имеет узлы компенсации реактивности и согласования с импедансом излучателя. В качестве излучателя использовался круглый поршневой преобразователь из пьезокерамики ЦТС-19 с радиусом излучающей поверхности  $a = 8$  мм и частотой механического резонанса  $f_p = \omega_p/2\pi = 1312$  кГц. Частота модуляции сигнала в эксперименте была равна  $F = \Omega/2\pi = 45$  и  $90$  кГц. Протяженность области дифракции Френеля (ближней зоны) излучателя и его чувствительность в режиме излучения на частоте  $\omega_0 = \omega_p$  составили соответственно  $l_\phi = 56$  мм и  $\gamma = 6800$  Па/В.

Для регистрации волн использовался цилиндрический звукоприемник с размерами  $3 \times 3$  мм, располагавшийся на акустической оси излучателя. Выбор расстояний между излучателем и приемником ( $x = 0,5$  и  $1$  м) определялся, с одной стороны, условием завершения дифракционных процессов в волне ( $x > l_\phi$ ), а с другой, — условием максимального проявления нелинейных процессов:  $x \ll l_3$ , где  $l_3 \approx 23$  м — характерный размер области затухания исследуемых волн.

Импульсный режим излучения ( $q = T_{сл}/\tau_H \sim 30$ ,  $T_{сл}$  — период следования импульсов) обеспечивает возможность временной селекции принимаемых сигналов на фоне эхосигналов от стенок бассейна, а также значительно снижает влияние

нелинейных процессов самовоздействия, связанных с нагревом среды и образованием акустических течений. Длительность радиоимпульсов ( $\tau_H = 350$  мкс) выбиралась из условия обеспечения квазинепрерывного режима для всех использовавшихся в эксперименте частот ( $\tau_H \gg 2\pi/\Omega$ ). Амплитуды боковых компонент спектра исходной ВКА были равны друг другу ( $U_H = U_B$ ) и соотносились с амплитудой центральной компоненты  $U_0$  как  $U_H/U_0 = U_B/U_0 = m/2$ , где  $m = 0,5; 1; 2$ .

В качестве рабочей среды использовалась отстоявшаяся пресная вода, которая в широком диапазоне амплитуд может быть отнесена к средам с квадратичной нелинейностью и на используемых в эксперименте частотах обладает пренебрежимо малой дисперсией. Условия эксперимента отличаются от плосковолновой расчетной модели [4] присутствием дифракционных процессов, приводящих к трансформации волнового фронта звукового пучка из квазиплоского в сферически расходящийся. Однако в силу узкополосности волнового пакета ( $\omega_0 \gg \Omega$ ) дифракционные изменения амплитуд и фаз у различных частотных компонент соизмеримы по величине и в силу линейного характера дифракции не зависят от амплитудно-фазовых соотношений в спектре исходной волны, чего нельзя сказать о нелинейных набегах фаз.

## 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ НАБЕГИ ФАЗ. ДИСПЕРСИЯ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ

На рис. 2, 4 и 5 приведены фазовые характеристики (ФХ), представляющие собой измеренные зависимости нелинейных набегов фаз отдельных компонент волнового пакета  $\theta_{H,0,B}$  от начальной величины фазового инварианта  $\beta_0$ . Параметрами кривых являются коэффициент амплитудной модуляции  $m$ , частота модуляции  $\Omega$ , амплитуда напряжения на излучателе  $U$  и расстояние от излучателя до точки наблюдения  $x$ . Сравнивая ФХ при разных значениях параметров, можно не только оценить их роль в нелинейной дисперсии, но и убедиться в нелинейном происхождении зависимостей  $\theta(\beta_0)$ , поскольку влияние этих параметров на нелинейные акустические процессы хорошо изучено [2, 3].

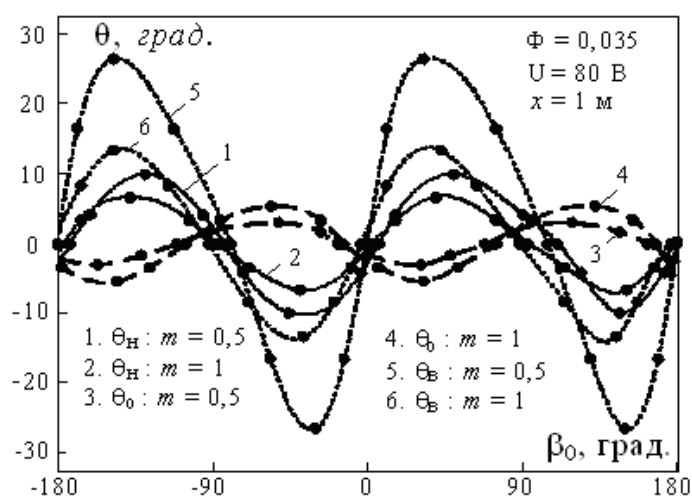


Рис. 2. Зависимости нелинейных набегов фазы компонент волнового пакета от начального значения фазового инварианта ( $\beta_0$ )

Влияние амплитудных соотношений в исходном спектре волнового пакета на нелинейные набеги фаз показано на примере ФХ, измеренных при различных значениях коэффициента амплитудной модуляции  $m = 2U_H/U_0 = 2U_B/U_0$ , рис. 2. Амплитуда электрического напряжения на излучателе в процессе измерений поддерживалась неизменной ( $U = 80$  В). ФХ получены при условии, что  $\Phi = \Omega/\omega_0 = 0,035$  ( $\Omega/2\pi = 45$  кГц) и начальное значение акустического числа Рейнольдса для излучаемой волны ( $x = 0$ ), характеризующее соотношение нелинейных и диссипативных процессов, равно  $Re_0 = Re(x=0) = P_m/b\omega_0 = 15,8$ , где  $P_m = \max|P(t)|$ ,  $b = 4,27 \cdot 10^{-3}$  кг/с·м — диссипативный коэффициент пресной воды.

Отметим качественное различие в поведении ФХ боковых и центральной компонент, сохраняющееся во всех измерениях. Как видно, рис. 2, при одних и тех же значениях фазового инварианта знаки нелинейных набегов фаз  $\theta_{H,B}$  и  $\theta_0$  противоположны. Так, для  $(-\pi) < \beta_0 < (-\pi/2)$  и  $0 < \beta_0 < \pi/2$  величины  $\theta_H$  и  $\theta_B$  изменяются в области положительных значений, в то время как  $\theta_0$  остается отрицательным; при  $(-\pi/2) < \beta_0 < 0$  и  $\pi/2 < \beta_0 < \pi$  ситуация обратная. Максимальные значения  $|\theta|$  принимают при  $\beta_0 \approx (\pm \pi/4)$  и  $(\pm 3\pi/4)$ , в то время как при  $\beta_0 \equiv 0, \pm \pi/2, \pm \pi, \dots$  компоненты волнового пакета распространяются без дополнительных фазовых набегов. Характерно, что нелинейным набегам фазы присуща частотная зависимость ( $\theta_H < \theta_B$ ), свойственная в целом нелинейным процессам (соотношения Мэнли-Роу).

В общем случае коэффициент амплитудной модуляции может изменяться в пределах  $[0, \infty)$ , при этом крайние его значения соответствуют монохроматическому сигналу ( $\omega_0$ ) и сигналу с балансной модуляцией ( $\omega_0 \mp \Omega$ ). Согласно рис. 2 диапазон изменения ФХ при увеличении  $m$  растет для  $\theta_0(\beta_0)$  и сужается для  $\theta_H(\beta_0)$  и  $\theta_B(\beta_0)$ . Такое поведение ФХ вполне ожидаемо, если принять во внимание, что увеличение  $m$  сопровождается уменьшением амплитуды центральной компоненты спектра и ростом амплитуд боковых гармоник. В этом случае относительный вклад фазозависимых добавок в центральную и боковые компоненты волнового пакета (при  $P_H = P_B$ )

$$\begin{aligned} \Delta P_0/P_0 &\sim P_H P_B P_0/P_0 = P_H^2 P_0/P_0 = P_B^2 P_0/P_0 = P_H^2 = P_B^2, \\ \Delta P_{H,B}/P_{H,B} &\sim P_H P_0^2/P_H = P_B P_0^2/P_B = 0,5mP_0^3/(0,5P_0) = P_0^2 \end{aligned} \quad (3)$$

изменяется в противоположных направлениях. Отмеченные закономерности согласуются с теоретическими результатами [4].

Отсутствие нелинейных набегов фазы при  $\beta_0 \equiv 0, \pm \pi/2, \pm \pi$  указывает на то, что распространение компонент волнового пакета происходит с одной и той же фазовой скоростью  $c_0$ . В развитие такого подхода конечные значения нелинейных фазовых набегов, что имеет место при других  $\beta_0$ , могут быть отнесены на счет изменившихся



фазовых скоростей у волн с частотами  $\omega_H$ ,  $\omega_B$  и  $\omega_0$ . Поскольку  $d\theta_i/d(k_i x) \ll 1$ , т. е. нелинейные фазовые набегги малы по отношению к пространственным набегам фаз, изменение фазовых скоростей представим в виде нелинейной добавки  $\Delta c_{\Phi i}$ :

$$c_{\Phi i}(x) = \frac{c_0}{1 - \theta'_{xi}(x) \cdot c_0 / \omega_i} \approx c_0 \left[ 1 + \frac{c_0}{\omega_i} \cdot \theta'_{xi}(x) \right] = c_0 + \Delta c_{\Phi i}(x),$$

где  $k_i = \omega_i / c$ ,  $\omega_i = \omega_{H,0,B}$ ,  $\theta_i(x)$  — пространственное распределение нелинейного набегга фазы  $i$ -й волны вдоль направления распространения волнового пакета;  $c_0$  — скорость звука в среде для волн малой амплитуды (далее принято, что  $c_0 = 1500$  м/с);  $\theta'_i(x) = d[\theta_i(x)]/dx$ ;

Фазовые характеристики, измеренные на фиксированном расстоянии от излучателя, позволяют оценить среднее фазовой скорости на дистанции  $(0, x)$ :

$$\bar{c}_{\Phi i}(x) \approx c_0 \left[ 1 + c_0 \frac{\theta_i(x)}{x\omega_i - c_0\theta_i(x)} \right] \approx c_0 \left[ 1 + c_0 \frac{\theta_i(x)}{x\omega_i} \right]. \quad (4)$$

На рис. 3 приведены рассчитанные согласно (4) зависимости  $\bar{c}_{\Phi i}$  от начального значения ФИ для  $x = 1$  м. Видно, что при  $(-\pi) < \beta_0 < (-\pi/2)$  и  $0 < \beta_0 < \pi/2$  скорость боковых компонент превышает  $c_0$ , в то время как центральная компонента распространяется с фазовой скоростью  $\bar{c}_{\Phi i} < c_0$ . При других значениях  $\beta_0$  ситуация обратная:  $c_{\Phi 0} > c_0$  и  $c_{\Phi(H,B)} < c_0$ .

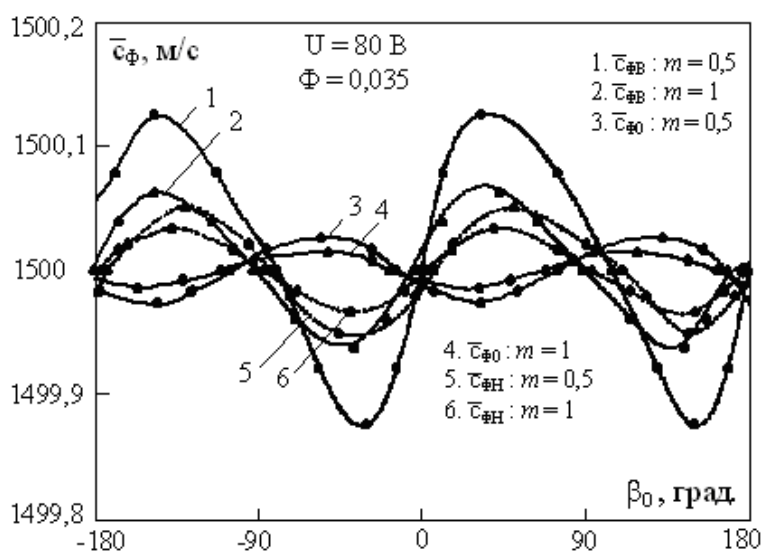


Рис. 3. Зависимость фазовой скорости компонент трехчастотного волнового пакета от начального значения ФИ

На рис. 4 и 5 приведены экспериментальные зависимости  $\theta_0(\beta_0)$  и  $\theta_B(\beta_0)$  при неизменных амплитудных ( $m=2$  и  $0,5$ ) и различных частотных ( $\Phi=0,035$  и  $0,07$ ) соотношениях в спектре волнового пакета. Наблюдаемое сужение размаха  $\theta_0(\beta_0)$  при увеличении частоты модуляции  $\Omega$  произошло в результате уменьшения реального коэффициента модуляции, см. (3), что в свою очередь является следствием ограниченной полосы пропускания пьезокерамического излучателя. Незначительный рост размаха зависимости  $\theta_B(\beta_0)$  является результатом как частотной зависимости нелинейных процессов, так и отмеченного выше уменьшения  $m$  [4].

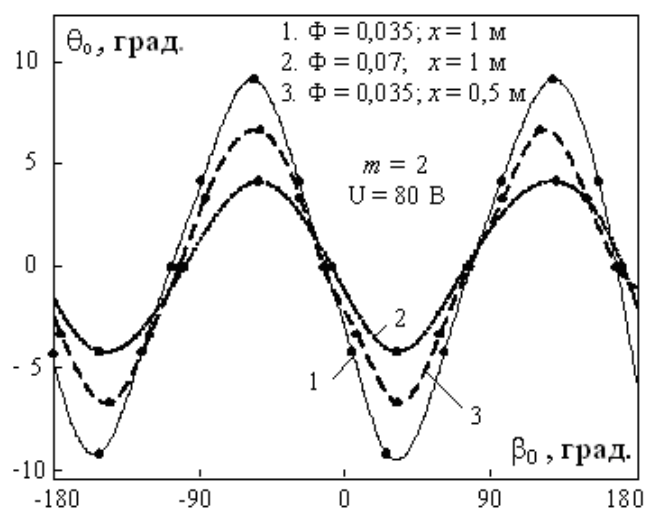


Рис. 4. Зависимости нелинейных набегов фазы центральной компоненты волнового пакета ( $\omega_0$ ) от начального значения ФИ для различных расстояний от излучателя

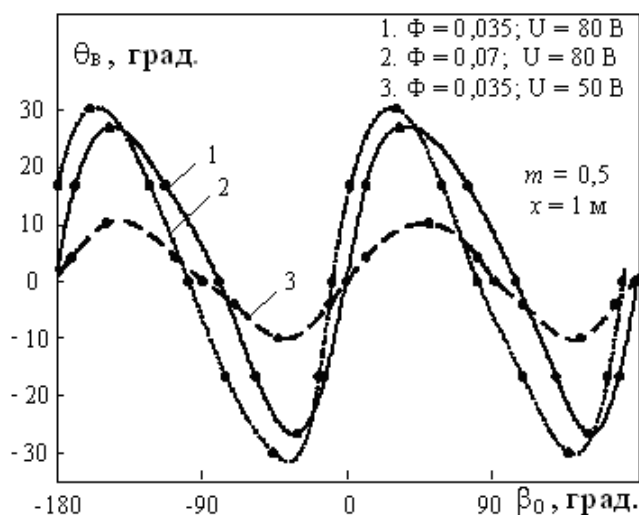


Рис. 5. Зависимости нелинейных набегов фазы высокочастотной компоненты волнового пакета ( $\omega_B$ ) от начального значения ФИ при различных напряжениях на излучателе

С увеличением расстояния, проходимого волновым пакетом, наблюдается рост нелинейных набегов фазы, что видно на примере  $\theta_0(\beta_0)$ , измеренных на расстояниях  $x = 0,5$  м и 1 м (кривые 3 и 1), рис. 4. Такое поведение фазовой характеристики обусловлено увеличением вклада нелинейной добавки в рассматриваемую волну, происходящим в результате накопительного характера нелинейных процессов. Рост фазовых набегов будет продолжаться до тех пор, пока дифракционные и диссипативные процессы не начнут доминировать над нелинейными.

Амплитудно-зависимый характер нелинейных набегов фаз виден на примере кривых 3 и 1 на рис. 5, где приведены зависимости  $\theta_b(\beta_0)$  при различных амплитудах электрического напряжения на излучателе, соответственно  $U = 50$  В и 80 В ( $\text{Re}_0 = 9,9$  и 15,8). Здесь прослеживается общая закономерность — ослабление нелинейных процессов при уменьшении амплитуды излучаемой волны, что проявилось в виде резкого сужения диапазона изменения ФХ при  $U = 50$  В.

### 3. АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Согласно результатам проведенных экспериментов фазовая зависимость нелинейных процессов не сводится к проявлению только дисперсии фазовых скоростей компонент волнового пакета. Ее влияние распространяется на энергообмен первичных и вторичных волн, а также первичных волн между собой. «Мостиком», связывающим компоненты волнового пакета и обеспечивающим их взаимное влияние, являются генерируемые в среде вторичные волны комбинационных частот. В результате можно говорить о взаимосвязи нелинейной дисперсии и процессов энергообмена, которая в общем случае следует из известного принципа причинности и для квадратично-нелинейных сред имеет фазозависимый характер.

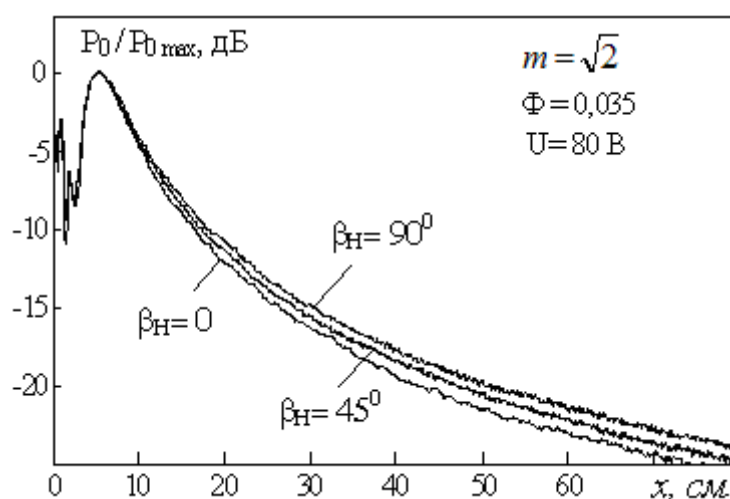


Рис. 6. Осевые распределения амплитуды центральной компоненты ( $\omega_0$ ) при различных значениях фазового инварианта

В качестве примера на рис. 6 приведены осевые распределения амплитуды центральной компоненты волнового пакета ( $\omega_0$ ) при  $\beta_0 = 0, \pi/4$  и  $\pi/2$ , из которых видно, что изменение фазовых соотношений в спектре волнового пакета наряду с появлением дисперсии фазовой скорости, рис. 3, приводит к изменению нелинейного затухания компонент. Случай  $m = \sqrt{2}$  и  $\beta_0 = \pi/2$  известен [5, 7] как режим фазового запрета, при котором прекращается перекачка энергии из первичных волн в четыре из девяти возможных каналов оттока второго порядка, что собственно и обеспечивает снижение нелинейного затухания.

Амплитудно-фазовые характеристики (АФХ), представляющие собой зависимость амплитуд отдельных компонент волнового пакета от начального значения фазового инварианта, показаны на рис. 7. Измерения АФХ проводились в дальней зоне звукового пучка на расстоянии  $x \approx 12 \cdot l_\phi = 66$  см, где процессы дифракции звукового пучка практически завершились. Рост амплитуды напряжения на излучателе приводит к увеличению диапазона изменений АФХ, отражая растущий вклад фазозависимых нелинейных процессов.

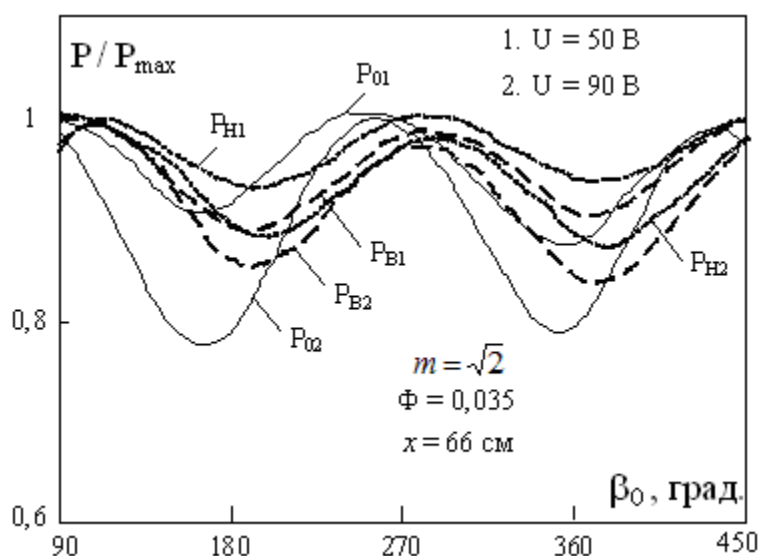


Рис. 7. Амплитудно-фазовые характеристики компонент волнового пакета при различных напряжениях на излучателе

Дифракционные набег фаз в пучке способны существенно повлиять на вид АФХ, что проявилось в смещении зависимостей  $P_0(\beta_0)$  в отрицательном и  $P_0(\beta_0)$  в положительном направлениях относительно оси ФИ на величину  $\Delta\beta_0 \approx 20^\circ$ . Анализ теоретической модели [4] показал, что такое поведение АФХ имеет место при появлении близких по величине дополнительных набегов фаз в компонентах волнового пакета, что и происходит в результате дифракции.

#### 4. ДИСПЕРСИЯ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ

Зависимости групповой скорости волнового пакета от фазовых соотношений в излучаемом сигнале  $v_{\text{ГР}}(\beta_0, x)$  могут быть рассчитаны из измеренных фазовых характеристик  $\theta_H(\beta_0, x)$  и  $\theta_B(\beta_0, x)$  согласно выражению [4]:

$$v_{\text{ГР}}(\beta_0, x) = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0} \approx c_0 \left[ 1 + c_0 \frac{\Delta\theta_{BH}(\beta_0, x)}{2\Omega x} \right]_{\Omega \rightarrow 0}, \quad (5)$$

где  $\Delta\theta_{BH}(\beta_0, x) = \theta_B(\beta_0, x) - \theta_H(\beta_0, x)$ .

На рис. 8 приведены полученные зависимости  $v_{\text{ГР}}(\beta_0, x)$  для различных соотношений амплитуд ( $m$ ) в спектре волнового пакета на расстоянии  $x = 1$  м от излучателя. Видно, что групповая скорость также, как и фазовые скорости отдельных компонент, имеет явно выраженный фазозависимый характер. В зависимости от значения ФИ она может быть равна, превышать или быть меньше скорости звука волны малой амплитуды  $c_0$ .

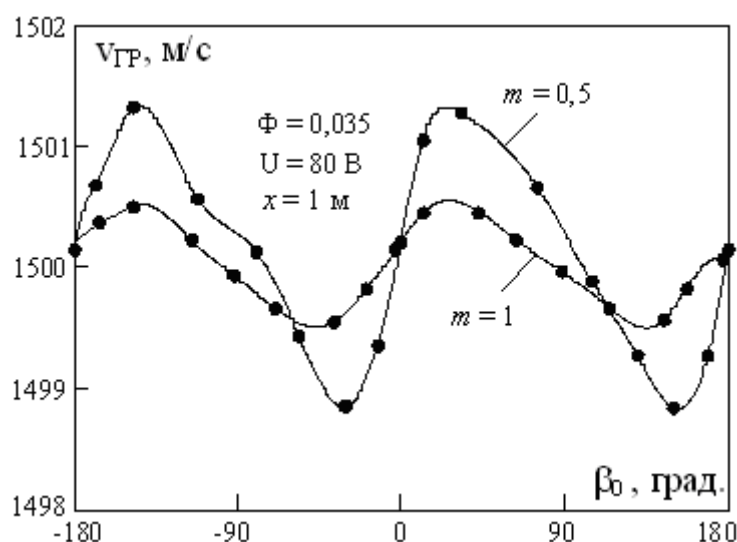


Рис. 8. Зависимость групповой скорости трехчастотного волнового пакета от начального значения ФИ при различных соотношениях амплитуд центральной и боковых компонент

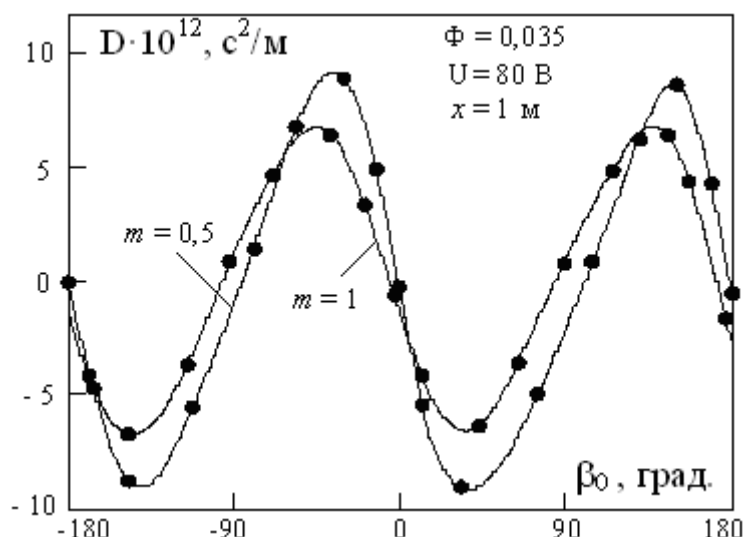


Рис. 9. Зависимости дисперсионного параметра от начального значения ФИ при различных соотношениях амплитуд центральной и боковых компонент

Используя экспериментальные ФХ, можно рассчитать дисперсионный параметр  $D$  трехчастотного волнового пакета, характеризующий квадратичное приближение теории дисперсии [2, 4]:

$$D(\omega_0, x) = \frac{d^2 k(\omega_0, x)}{d\omega^2} = \left[ \left( \frac{dv_{\text{ГР}}}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right]^{-1} \cong -2 \left[ \frac{\Delta\beta(x)}{\Omega^2 x} \right]_{\Omega \rightarrow 0}. \quad (6)$$

Результаты расчета приведены на рис. 9. Несмотря на малость абсолютного значения дисперсионного параметра, максимальная его величина оказалась на порядок больше, чем измеренное значение  $D$  для дисперсии в тонкой проволоке, полученное в работе [6]. Изменяя значение фазового инварианта в излучаемом трехчастотном сигнале, можно не только регулировать величину  $D$ , но и обращать его знак на противоположный.

Отметим, что понятие групповой скорости как скорости распространения огибающей волнового пакета имеет ограниченную область применимости, поскольку при наличии дисперсии волновой пакет не только перемещается, но при этом еще и меняет свою форму. Убедиться в этом можно, если учесть квадратичный член в разложении волнового числа в окрестности средней частоты  $\omega_0$  [8, 9]:

$$\begin{aligned} k(\omega) &\approx k(\omega_0) + \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} \cdot (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} \cdot (\omega - \omega_0)^2 \approx \\ &\approx k(\omega_0) + \frac{\Omega}{v_{\text{ГР}}} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dv_{\text{ГР}}}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right]^{-1} \cdot \Omega^2, \end{aligned}$$

который приводит к изменению фаз волн, входящих в волновой пакет, на величину  $0,5x(dv_{ГР}/d\omega)_{\omega_0} \cdot \Omega^2$ . В этом случае выражение, описывающее волновой пакет в первом приближении теории дисперсии

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \sum_{\omega=\omega_H}^{\omega=\omega_B} \dot{P}(\omega) \cdot \exp\{i[\omega \cdot t - k(\omega) \cdot x]\} = \\ &= \exp\{i[\omega_0 t - k(\omega_0) \cdot x]\} \cdot \sum_{n=-1}^{n=1} \dot{P}(\omega_0 + n\Omega) \cdot \exp\left[in\Omega\left(t - \frac{x}{v_{ГР}}\right)\right] \equiv \\ &\equiv \exp\{i[\omega_0 t - k(\omega_0) \cdot x]\} \cdot A\left(t - \frac{x}{v_{ГР}}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

можно свести к виду гармонической модулированной волны с огибающей

$$A = \sum_{n=-1}^{n=1} \dot{P}(\omega_0 + n\Omega) \cdot \exp\left\{in\Omega\left(t - \frac{x}{v_{ГР}}\right) - i\frac{x}{2}\left[\left(\frac{dv_{ГР}}{d\omega}\right)_{\omega_0}\right]^{-1} \cdot (n\Omega)^2\right\} = A\left(t - \frac{x}{v_{ГР}}, x\right) \quad (8)$$

только в том случае, если квадратичная добавка в выражении (7) мала [9], т. е.

$$\frac{x}{2}\left[\left(\frac{dv_{ГР}}{d\omega}\right)_{\omega_0}\right]^{-1} \cdot (n\Omega)^2 \ll \pi, \quad (9)$$

и не сказывается на относительной разности фаз между слагаемыми в модулирующей функции  $A(t - x/v_{ГР}, x)$ . В выражениях (7) и (8) величина  $\dot{P}(\omega_0 + n\Omega)$  соответствует комплексной амплитуде одной из трех частотных компонент пакета: при  $n = -1$  имеем  $\dot{P}(\omega_0 - \Omega) = \dot{P}(\omega_H)$ , при  $n = 0$  —  $\dot{P}(\omega_0)$  и при  $n = 1$  —  $\dot{P}(\omega_0 + \Omega) = \dot{P}(\omega_B)$ . Из условия (9) получаем характерное расстояние существования волнового пакета:

$$x \ll x_0 = \frac{2\pi}{\left|(d^2k/d\omega^2)_{\omega_0}\right| \cdot \Omega^2} = \frac{2\pi}{|D| \cdot \Omega^2}, \quad (10)$$

в пределах которого можно ожидать, что его форма не успеет претерпеть значительных изменений. Для максимальных значений дисперсионного параметра  $D$ , приведенных на рис. 9, значения  $x_0$  согласно (10) составили при  $m = 0,5$  и  $m = 1$  соответственно 8,7 и 11,2 метра. Таким образом, уже с расстояний, равных нескольким десяткам сантиметров, начинает проявляться влияние нелинейной дисперсии, приводящее к искажению формы огибающей. В случае недопустимости таких искажений единственным средством противодействия является выбор таких значений фазового инварианта, при которых  $D \rightarrow 0$ , т. е.  $\beta_0 = 0, \pm 90^\circ, \pm 180^\circ, \dots$

Полученные результаты могут быть распространены на случай радиоимпульсов с синусоидальным заполнением, спектр которых согласно теореме Фурье можно представить в виде суперпозиции гармонических колебаний с частотами  $\omega_0 \pm n\Omega$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$  при  $\Omega \rightarrow 0$ .

Настоящая работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию РФ (грант № 04-3.20-479).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа имела своей целью показать на примере экспериментального исследования трехчастотного волнового пакета, что фазовые соотношения в спектре модулированных волн конечной амплитуды способны существенно влиять на условия передачи информации за счет нелинейных дисперсионных процессов в среде распространения. При этом удалось экспериментально подтвердить наличие условий, при которых нежелательное влияние нелинейной дисперсии может быть исключено. Согласие теоретических и экспериментальных результатов свидетельствует о необходимости учета возникновения нелинейной дисперсии в квадратично-нелинейных бездисперсионных средах, чему до последнего времени не придавалось значения. Учитывая стремление разработчиков увеличивать дальность действия и помехозащищенность акустической аппаратуры, что во многих случаях достигается наращиванием излучаемой мощности, следует учитывать появление ограничений на решение данных задач со стороны нелинейной дисперсии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Островский Л. А., Потапов А. И. Введение в теорию модулированных волн. М., Физматлит, 2003, 400 с.
2. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., Наука, 1990, 432 с.
3. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика. Л., Судостроение, 1981, 264 с.
4. Гаврилов А. М. Нелинейная дисперсия трехчастотного волнового пакета в бездисперсионной квадратично-нелинейной среде. Теория. Электронный журнал «Техническая акустика», <[http:// webcenter.ru/~eeaa/ejta](http://webcenter.ru/~eeaa/ejta)> 2005, 28.
5. Гаврилов А. М., Медведев В. Ю. О влиянии амплитудно-фазового спектра на нелинейное распространение трехчастотной волны. Труды XIII сессии Российского акустического общества, т. 1. М., ГЕОС, 2003, с. 130 – 133.
6. Зверев В. А. Модуляционный метод измерения дисперсии ультразвука. Акуст. ж., 1956, т. 2, № 2, с. 142 – 145.
7. Гаврилов А. М. Зависимость характеристик параметрической антенны от фазовых соотношений в спектре накачки. Акуст. ж., 1994, т. 40, № 2. с. 235 – 239.
8. Горелик Г. С. Колебания и волны. М., Госиздат физ.-мат. литературы, 1959. 572 с.
9. Карлов Н. В., Кириченко Н. А. Колебания, волны, структуры. М., Физматлит, 2003. 496 с.