

Ю. В. Ваньков<sup>1</sup>, Э. Р. Яковлева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казанский государственный энергетический университет,  
420066, г. Казань, ул. Красносельская, 51

<sup>2</sup>Казанское высшее артиллерийское командное училище,  
420025, г. Казань, Октябрьский городок, e-mail: [e\\_yakovleva@pisem.net](mailto:e_yakovleva@pisem.net)

## Об одном подходе к оценке затухания свободных колебаний

Получена 24.01.2005, опубликована 01.07.2005

Рассматривается один из подходов к оценке затухания колебаний при диагностике изделий методом свободных колебаний. Предложен подход на основе робастной оценки затухания колебаний. Оценка параметров затухания проводится как в целом по сигналу, так и на отдельных частотах. Изложена методика робастной оценки параметров затухания колебаний. Приводятся примеры практического применения разработанной методики. Вводится понятие начального амплитудного спектра.

### ВВЕДЕНИЕ

При диагностике изделий методом свободных колебаний одним из очевидных является утверждение: наличие дефекта влияет на рассеяние энергии в материале. Отсюда вытекает задача определения характеристик рассеяния энергии. Одной из таких характеристик является коэффициент затухания колебаний, по изменению которого можно судить о наличии дефекта.

Уравнение затухающих колебаний можно представить в виде:

$$X = Ae^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где  $A$  — начальная амплитуда свободных колебаний;  $\varphi_0$  — начальная фаза;  $\omega$  — круговая частота;  $n$  — коэффициент затухания, определяющий быстроту изменения амплитуды.

Коэффициент затухания (по его физическому смыслу) — это величина, обратная промежутку времени, по истечении которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e = 2,73$  раз.

### 1. О СПОСОБАХ ОЦЕНКИ ЗАТУХАНИЯ

На наш взгляд, экспериментальная оценка затухания свободных колебаний возможна несколькими способами:

- по сигналу,
- по спектрам сканирования сигнала,
- косвенным способом.

Оценка затухания колебаний по сигналу сводится к отысканию подходящей огибающей графика сигнала. Практически полезной эта оценка может быть для грубой отбраковки изделий (на уровне бинарной логики «исправно-дефектно») и для нормирования спектров как способа преодолеть остаточную нестабильность силы, места и направления удара, возбуждающего свободные колебания. Для уточнения характера дефекта, его положения, размеров и прочей детализации дефекта такая оценка вряд ли будет полезной.

Два других способа связаны с вычислением спектров сканирования сигнала. Под сканированием сигнала понимается процесс перемещения по оси времени с постоянным шагом окна фиксированного размера. Из отсчётов сигнала, попавших в окно в том или ином его положении на оси времени, формируется выборка сигнала для формирования по ней спектра. При формировании спектра используется одна из известных функций оконного взвешивания отсчётов выборки сигнала (окно Бартлетта, Хэмминга и т. д.). Каждому спектру сканирования можно сопоставить определённое время. Проведя сканирование, мы получаем зависимость спектра сигнала от времени.

На рис. 1 показан результат сканирования некоторого сигнала. На этом графике нетрудно заметить затухание всех частотных составляющих сигнала.

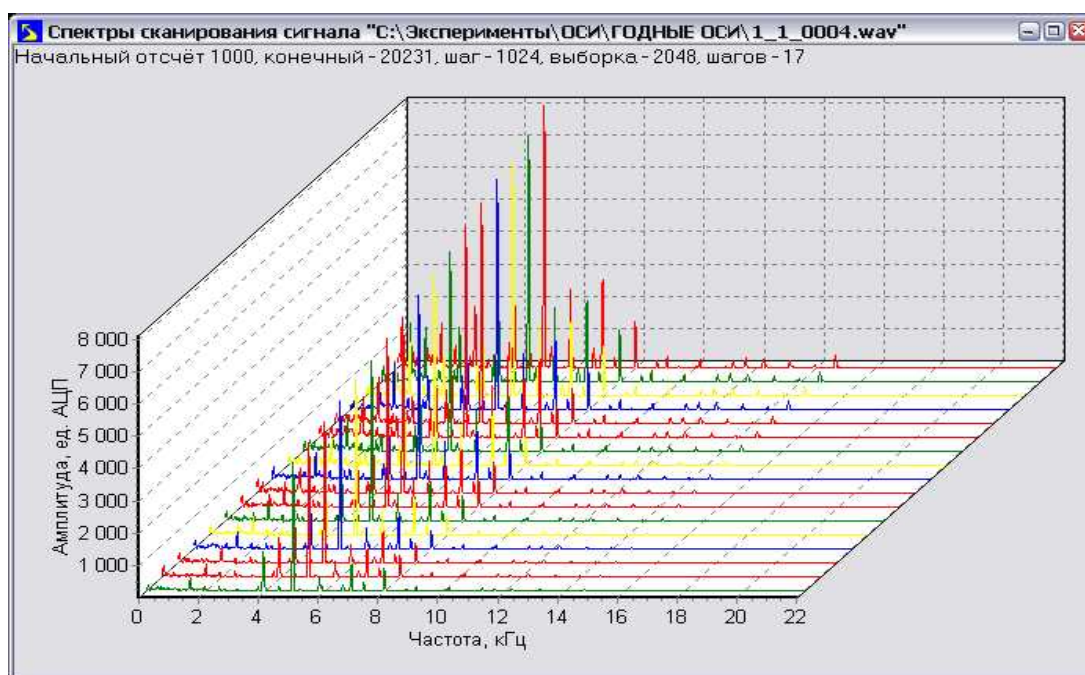


Рис. 1. Набор спектров сканирования сигнала.  
Ось времени направлена к наблюдателю

Косвенной мы называем оценку затухания колебаний по изменению того или иного параметра, вычисленного по каждому из спектров сканирования сигнала. Пример графиков ряда параметров, вычисленных по каждому спектру сканирования с рис. 1, показан на рис. 2.

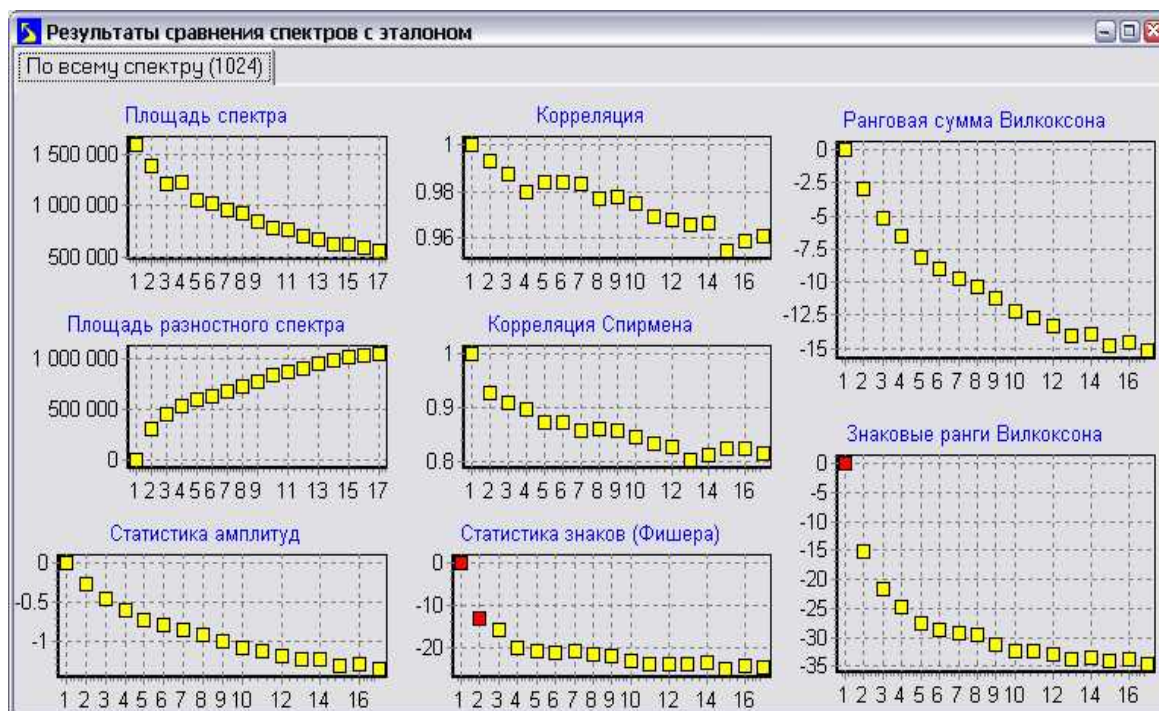


Рис. 2. Графики статистик для спектров с рис. 1.  
По оси абсцисс отложены порядковые номера спектров сканирования

Очевидно, характер изменения этих параметров во времени объясняется именно затуханием сигнала. Однако область применения такой оценки затухания колебаний практически неотличима от аналогичной для упомянутой выше оценки затухания колебаний по сигналу. Недостатком этого подхода является зависимость оценки затухания от параметра, на основе которого она вычислена.

Для детализации дефекта наиболее перспективной представляется почастотная оценка затухания колебаний по спектрам сканирования сигнала.

## 2. МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ЗАТУХАНИЯ

Итак, имеется некоторое число  $N$  измеренных значений амплитуды  $a_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ), каждому из которых сопоставлено определённое время  $t_i$ .

Уравнение изменения амплитуды свободных колебаний в процессе их затухания во времени имеет вид:

$$a(t) = A \cdot e^{-nt}. \quad (1)$$

Примем, что наблюдаемые и истинные значения амплитуды различаются на величину случайной ошибки  $\Delta$ :

$$a_i = a(t_i) + \Delta.$$

Логарифмированием уравнения (1) получим:

$$\ln a(t) = \ln A - n \cdot t. \quad (2)$$

На основе этой модели (линейной по искомым параметрам в отличие от исходной модели) становится возможным решение поставленной задачи с помощью известных методов математической статистики.

## 2.1. Получение начального приближения

Начальное приближение искомых оценок будем искать методом наименьших квадратов (МНК) (возможны и другие способы получения начального приближения). Сутью МНК [1] является отыскание таких оценок, которые бы минимизировали сумму квадратов невязок

$$\sum_{i=1}^N r_i^2 \rightarrow \min ,$$

где невязки  $r_i$  в нашем случае определяются выражением

$$r_i = \ln a_i - (\ln A - n \cdot t_i) . \quad (3)$$

Решение МНК в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{Y} , \quad (4)$$

где

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \ln A \\ n \end{pmatrix} \text{ — матрица искомых оценок;}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -t_1 \\ 1 & -t_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & -t_N \end{pmatrix} \text{ — матрица коэффициентов; } \mathbf{X}^T \text{ — транспонированная матрица } \mathbf{X};$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \ln a_1 \\ \ln a_2 \\ \dots \\ \ln a_N \end{pmatrix} \text{ — матрица логарифмов наблюдаемых значений амплитуды;}$$

$\mathbf{W}$  — матрица весов наблюдений и корреляционных связей между ними;

$( )^{-1}$  — означает операцию обращения матрицы.

Пренебрегая корреляционными связями и принимая все наблюдения равновесными, получим:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} ,$$

т. е. в нашей матрице весов все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные — 0;

## 2.2. Уточнение оценок начального приближения

Оценки  $\mathbf{Q}_0$  начального приближения матрицы  $\mathbf{Q}$  являются отправной точкой этапа их уточнения итерационными методами. Для уточнения  $\mathbf{Q}_0$  мы выбрали схему итерационного МНК. Другие методы (например, метод Гаусса-Ньютона) мы не рассматриваем.

Оценки  $\mathbf{Q}_{j+1}$  очередной итерации на данном этапе определяются из условия минимума некоторой функции невязок, нормированных робастной оценкой их среднеквадратического отклонения  $S$  [2–5]:

$$\sum_{i=1}^N \rho(r_i / S) \rightarrow \min, \quad (5)$$

$$S = \frac{\text{med} \{|r_i|\}}{0.6745}.$$

Дифференцируя (5) по  $\mathbf{Q}$ , получим:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i^T \cdot \Psi(r_i / S) = 0, \quad (6)$$

где  $\Psi(\cdot) = \rho'(\cdot)$  — целевая функция (производная от  $\rho$ ).

Умножив и разделив левую часть (6) на  $r_i / S$ , обозначив

$$\mathbf{W}_I(\mathbf{Q}_j) = \frac{\Psi(r_i / S)}{r_i / S} \quad (7)$$

и подставив вместо  $r_i$  его значение из (3), получим:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i^T \cdot \mathbf{W}_I(\mathbf{Q}_j) \cdot (y_i - \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{Q}_j) = 0,$$

откуда приходим к схеме итерационного МНК для  $(j+1)$ -го шага итерационного процесса

$$\mathbf{Q}_{j+1} = \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i^T \cdot \mathbf{W}_I(\mathbf{Q}_j) \cdot \mathbf{X}_i \right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i^T \cdot \mathbf{W}_I(\mathbf{Q}_j) \cdot y_i,$$

которая в матричной форме эквивалентна схеме (4) обычного МНК.

## 2.3. Целевая функция

В качестве целевой функции можно применить одну из известных в робастной статистике [2–5] функций:

1) синусоида Андрюса

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sin(x/a), & |x| \leq \pi \cdot a \\ 0, & |x| \geq \pi \cdot a \end{cases}$$

## 2) трёхчастная сниженная функция Хампеля

$$\Psi(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq a \\ a \cdot \text{sign}(x), & a \leq |x| \leq b \\ a \cdot \left( \frac{x - c \cdot \text{sign}(x)}{b - c} \right), & b \leq |x| \leq c \\ 0, & c \leq |x| \end{cases}$$

## 3) функция Хьюбера

$$\Psi(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq a \\ a \cdot \text{sign}(x), & |x| \geq a \end{cases}$$

## 4) биквадратная весовая функция (бивес) Тьюки

$$\Psi(x) = \begin{cases} x \cdot \left( 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right)^2, & |x| \leq a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$$

На рис. 3 приведен график функции Хампеля в правой полуплоскости. График в левой полуплоскости симметричен ему относительно начала координат.

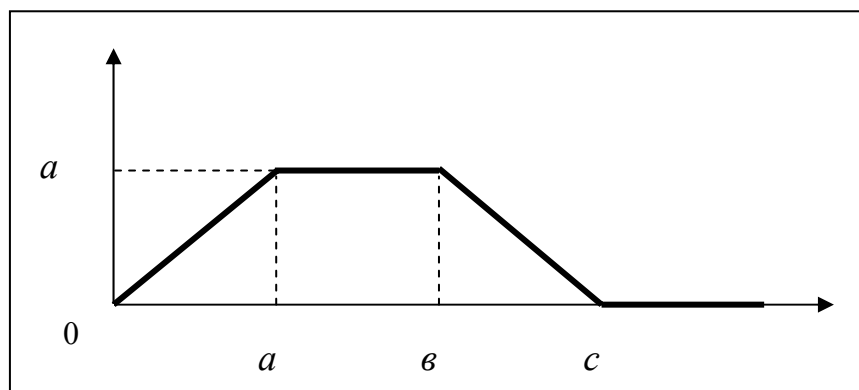


Рис. 3. График функции Хампеля

Напомним, что аргументом целевой функции является нормированная невязка  $r_i / S$ , а через её значение определяется вес (7) соответствующего наблюдения. На примере функции Хампеля выделим следующие области различной степени доверия к наблюдениям в зависимости от их невязок:

1) область полного доверия  $|x| \leq a$ , в которой соответствующие наблюдения получают одинаковый вес, равный 1;

2) область ограниченного доверия  $a \leq |x| \leq b$ , в которой наблюдения получают вес тем меньший единицы, чем дальше расположен аргумент от первой области;

3) область нарастающего сомнения  $b \leq |x| \leq c$ , в которой вес наблюдений снижается ещё резче вплоть до нуля;

4) область полного недоверия  $|x| \geq c$ , наблюдения из которой вообще не учитываются при уточнении оценок.

Все или почти все названные области можно выделить и на графиках других названных целевых функций.

### 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДИКИ

Изложенная методика реализована нами в виде программы для ПК, с помощью которой и получены следующие ниже результаты.

На рис. 4 приведён пример оценки затухания одной из частотных составляющих (частотой порядка 6,5 кГц) свободных колебаний дефектной железнодорожной оси (тот же снимок в большем масштабе см. в [приложении 1](#)). Основные характеристики принятого звукового сигнала показаны в заголовке снятого окна программы: одноканальный сигнал длительностью 20563 отсчёта (0,466 с) при разрядности 16 бит и частоте дискретизации 44100 Гц. Сканированием сигнала в пределах от 100-го до 20563-го отсчётов выборкой по 2048 отсчётов (с шагом 1024 отсчёта между соседними выборками) получены 18 спектров. По оси абсцисс на данном и других графиках отложено время (в секундах), по оси ординат — амплитуда колебаний (в единицах шкалы АЦП). Оценка начального приближения показана красным цветом, а результат её уточнения — синим.

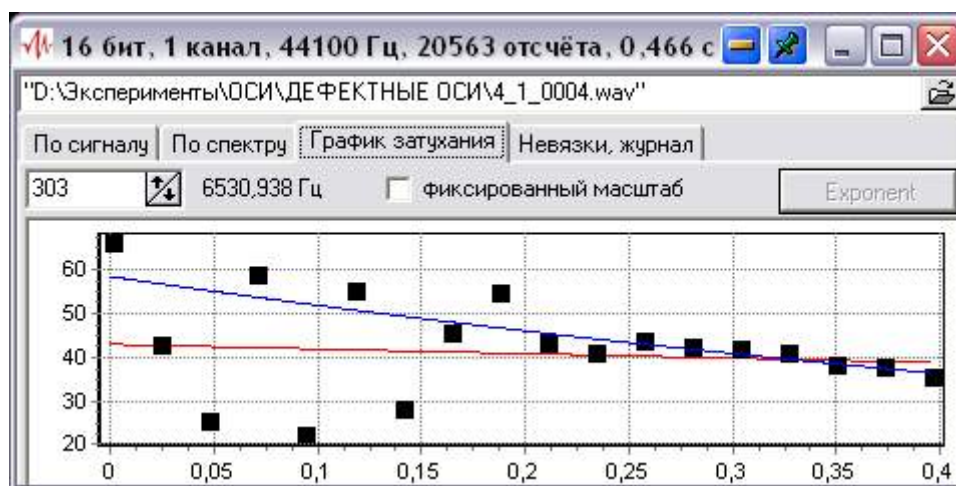


Рис. 4. Результаты оценки затухания свободных колебаний на одной из частот спектра

В табл. 1 приведён отчёт об этой оценке затухания (полную версию этого отчёта, созданную программой, см. в [приложении 2](#)). 1-й этап оценивания — получение начального приближения параметров экспоненты — принёс следующие результаты: начальная амплитуда  $A = 42,938065$ , коэффициент затухания  $n = 0,254541$ , средняя невязка наблюдаемых значений относительно расчётных равна  $-0,000001$ , а



среднеквадратическое отклонение (СКО) невязок — 0,278419. 2-й этап оценивания — уточнение оценок начального приближения — после 17 итераций (при достижении заданного уровня относительной сходимости 0,00001) остановился на значениях 58,456093; 1,197345; – 0,032922 и 0,099446 соответственно.

Таблица 1. Отчёт об оценке затухания

№	Время	Измер.	Начальное приближение				Уточнение				
			Расч.	Невяз.	Норм.нев.	Вес	Расч.	Невяз.	Норм.нев.	Вес	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,002	4,190	3,759	0,431	1,548	1,000	4,066	0,125	1,252	0,942	
2	0,025	3,754	3,753	0,001	0,004	1,000	4,038	-0,283	-2,849	0,721	*
3	0,049	3,234	3,747	-0,513	-1,844	1,000	4,010	-0,776	-7,804	0,000	***
4	0,072	4,069	3,741	0,327	1,175	1,000	3,982	0,086	0,869	0,972	
5	0,095	3,091	3,736	-0,644	-2,314	1,000	3,954	-0,863	-8,678	0,000	***
6	0,118	4,010	3,730	0,280	1,005	1,000	3,927	0,083	0,834	0,974	
7	0,142	3,337	3,724	-0,387	-1,388	1,000	3,899	-0,562	-5,647	0,163	**
8	0,165	3,815	3,718	0,097	0,349	1,000	3,871	-0,056	-0,562	0,989	
9	0,188	3,998	3,712	0,286	1,026	1,000	3,843	0,155	1,554	0,912	
10	0,211	3,769	3,706	0,063	0,225	1,000	3,815	-0,047	-0,470	0,992	
11	0,234	3,709	3,700	0,009	0,033	1,000	3,788	-0,078	-0,787	0,977	
12	0,258	3,775	3,694	0,081	0,290	1,000	3,760	0,015	0,151	1,000	
13	0,281	3,745	3,688	0,057	0,204	1,000	3,732	0,013	0,132	1,000	
14	0,304	3,729	3,682	0,046	0,167	1,000	3,704	0,025	0,248	0,998	
15	0,327	3,703	3,676	0,027	0,097	1,000	3,676	0,027	0,272	0,998	
16	0,351	3,637	3,671	-0,034	-0,122	1,000	3,649	-0,012	-0,120	1,000	
17	0,374	3,631	3,665	-0,033	-0,120	1,000	3,621	0,011	0,106	1,000	
18	0,397	3,565	3,659	-0,094	-0,336	1,000	3,593	-0,028	-0,280	0,997	

Здесь 2-й столбец содержит значения времени  $t_i$ , 3-й — логарифмы измеренных значений амплитуды  $\ln a_i$ , 4-й — логарифмы расчётных значений амплитуды  $\ln A - n \cdot t_i$ , 5-й — невязки  $r_i$ , 6-й — нормированные невязки  $r_i/S$ , 7-й — веса; назначение столбцов 8–11 аналогично столбцам 4–7; в столбце 12 помечены отдельные наблюдения (при уточнении признанные выделяющимися).

Анализ данных табл. 1 с учётом графика рис. 4 позволяет сделать такие выводы:

1. Результаты 1-го и 2-го этапов оценивания существенно различны.
2. Оценка начального приближения явно неудачна вследствие влияния 3–4 выделяющихся наблюдений. Веса всех наблюдений, равные 1 (7-й столбец табл. 1), а также и средняя невязка, практически равная нулю, являются характерной особенностью начального приближения. Значения нормированной невязки (6-й столбец), по модулю не превышающие 3, не позволяют отбраковать какое-либо из наблюдений как явно выделяющееся (сомнительное).
3. Этап уточнения оценок позволил исправить неудачное начальное приближение. Двум выделяющимся наблюдениям присвоен нулевой вес, а веса ещё двух наблюдений существенно снижены. Гораздо меньше (т. е. лучше) стал и разброс невязок: 0,099446 вместо начального 0,278419.



На рис. 5 показано ещё несколько примеров существенных различий начальных и конечных оценок.



Рис. 5. Примеры существенных отличий начальных и конечных оценок

В табл. 2 (см. также файл [приложение 3](#)) приведены результаты почастотной (для нескольких первых мод спектра) оценки затухания свободных колебаний в серии опытов с одним бездефектным изделием без изменения его состояния и положения относительно опоры и ударника. В этих опытах, как и во всех других, ставилась задача стабилизации силы удара.

Таблица 2. Почастотная оценка затухания в серии опытов с одним изделием

№	Имя файла сигнала	Моды		Нач. приближение		Уточнение		
		№	Частота, Гц	A	n	Шагов	A	n
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2_1_0001.wav	227	4892,8	15356,9	1,708	3	15345,4	1,706
		268	5776,5	5783,9	2,654	26	5754,2	2,614
		238	5129,9	4512,6	5,709	4	4517,9	5,719
		2	43,1	4285,2	4,545	25	4109,7	3,878
		181	3901,3	3374,0	2,609	3	3372,4	2,608
		120	2586,5	2608,1	3,352	4	2611,0	3,357
		271	5841,2	2522,0	1,578	3	2520,5	1,581
		172	3707,3	2381,6	8,626	5	2366,1	8,590
2	2_1_0005.wav	227	4892,8	12443,4	1,593	11	12409,7	1,582
		2	43,1	3479,1	3,808	11	4524,4	3,865
		268	5776,5	3930,3	2,754	3	3929,3	2,754
		238	5129,9	3503,3	5,094	4	3510,0	5,105
		120	2586,5	3199,3	3,811	12	3181,8	3,786
		181	3901,3	2940,4	3,026	11	2954,8	3,048
		271	5841,2	2213,3	1,453	6	2204,5	1,453
		172	3707,3	1879,0	7,430	4	1873,4	7,417
3	2_1_0006.wav	227	4892,8	17077,5	1,647	6	17053,0	1,650
		268	5776,5	6428,9	2,545	7	6428,7	2,535
		238	5129,9	4099,1	5,185	4	4100,1	5,181
		271	5841,2	3482,0	1,274	5	3481,3	1,273
		120	2586,5	3303,9	3,823	7	3326,8	3,850
		181	3901,3	3204,7	2,600	4	3201,3	2,593
		205	4418,6	2604,9	5,595	4	2639,5	5,619
		2	43,1	2321,6	1,704	9	2288,8	1,540
4	2_1_0007.wav	227	4892,8	13809,8	1,617	4	13788,4	1,611
		2	43,1	5484,2	5,203	5	5599,2	5,219
		268	5776,5	5076,3	2,938	3	5077,8	2,940
		120	2586,5	3212,7	4,353	7	3192,6	4,327
		238	5129,9	3039,0	4,972	3	3037,3	4,974
		181	3901,3	3051,5	2,984	19	2971,0	2,887
		271	5841,2	2749,5	1,659	8	2773,1	1,680
		172	3707,3	2601,8	9,129	4	2561,4	8,993
5	2_1_0008.wav	227	4892,8	13790,8	1,797	11	13752,3	1,788
		2	43,1	5340,9	4,229	5	5535,4	4,269
		268	5776,5	4376,6	2,926	4	4381,0	2,928
		181	3901,3	3135,9	2,694	10	3157,6	2,717
		238	5129,9	2678,0	4,591	7	2687,7	4,616
		120	2586,5	2661,3	3,508	5	2676,2	3,527
		271	5841,2	2542,4	1,766	3	2546,3	1,775

Здесь в 3 и 4 столбцах размещены сведения об основных модах спектра (порядковый номер частоты в спектре и значение частоты (Гц) соответственно), а в столбце 7 — число итераций уточнения оценок начального приближения.

Анализ этих результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. Оценки начального приближения, как правило, мало отличаются от уточнённых оценок.

Из этого факта, однако, было бы неверно сделать вывод о ненужности, бесполезности этапа уточнения. Примеры существенного улучшения оценок начального приближения в результате их уточнения приведены выше. Из них видно, что этап уточнения оценок начального приближения, автоматически уменьшая влияние случайных факторов (сомнительных данных), является дополнительной гарантией надёжности, достоверности итоговых оценок. В конечном счете, это влияет на результат диагностики.

2. При уточнении оценок начального приближения заданный уровень относительной сходимости ( $0,00001$ ) достигается, как правило, менее чем 10 итерациями.
3. На всех частотах имеет место значительный разброс оценок в разных опытах.

Из этого следует, что в этих опытах задача стабилизации силы удара не была решена. С учётом массы и размеров объекта испытаний — железнодорожной колёсной оси — эта задача и не была тривиальной. Далёкими от идеала были и условия записи акустических сигналов в этих экспериментах — цех по ремонту железнодорожных вагонов с хаотически работающим оборудованием. С другой стороны, не будет лишней и реализация мер парирования нестабильности силы удара. Это может быть, во-первых, корректировка методики регистрации и анализа данных путём введения в неё этапа предварительного (например, при записи сигналов) анализа стабильности экспериментов. Во-вторых, возможно то или иное нормирование спектра.

4. Имеет место изменение рангов основных мод спектра.

Следовательно, помимо силы удара не удалось обеспечить и стабильность направления удара, следствием чего и стало неодинаковое возбуждение колебаний на разных частотах.

5. Скорости затухания свободных колебаний на разных частотах существенно различны.

В табл. 3 приведены результаты оценки затухания (в целом по сигналу) свободных колебаний в серии экспериментов с одним изделием (исправной железнодорожной осью) в четырёх различных её положениях относительно опоры (с поворотом на  $90^\circ$ ).

Таблица 3. Оценка затухания в целом по сигналу

№	Имя файла	Нач. приближение		Уточнение	
		A	n	A	n
1	1_1_0004.wav	29192,7	2,686	29162,5	2,681
2	1_1_0006.wav	29694,8	2,834	29697,8	2,836
3	1_1_0008.wav	27074,2	3,013	26887,2	2,986
4	1_1_0011.wav	29522,9	3,084	29471,5	3,081
5	1_1_0013.wav	26311,1	3,064	26247,8	3,056
6	1_1_0015.wav	28232,1	2,924	28184,3	2,922
7	1_1_0017.wav	30183,9	2,649	30172,0	2,647
8	1_1_0019.wav	31400,9	2,780	31374,5	2,776
Среднее		28951,57	2,8792	28899,71	2,8732
СКО		1667,72	0,1684	1705,92	0,1648
9	1_2_0021.wav	32655,5	2,516	32763,1	2,524
10	1_2_0022.wav	26590,1	2,480	26521,3	2,470
11	1_2_0023.wav	27438,2	2,532	27392,4	2,521
12	1_2_0024.wav	27141,7	2,607	27122,9	2,604
13	1_2_0025.wav	27634,9	2,668	27472,8	2,651
14	1_2_0026.wav	26178,7	2,562	26002,0	2,538
15	1_2_0027.wav	25759,3	2,626	25756,5	2,624
16	1_2_0028.wav	32616,2	2,558	32763,5	2,580
17	1_2_0029.wav	25529,0	2,526	25440,5	2,512
18	1_2_0030.wav	29455,4	2,572	29467,9	2,579
Среднее		28099,91	2,5646	28070,29	2,5604
СКО		2637,74	0,0564	2721,60	0,0565
19	1_3_0031.wav	28342,9	2,761	28076,0	2,731
20	1_3_0032.wav	29914,5	2,689	29751,5	2,673
21	1_3_0033.wav	29295,9	2,902	29166,4	2,885
22	1_3_0034.wav	28941,4	2,814	28904,4	2,812
23	1_3_0035.wav	30524,4	2,848	30403,8	2,836
24	1_3_0036.wav	30229,9	2,869	30171,0	2,862
25	1_3_0037.wav	30405,7	2,772	30404,3	2,775
26	1_3_0038.wav	31611,2	2,815	31643,4	2,817
27	1_3_0039.wav	31266,6	2,891	31247,2	2,891
28	1_3_0040.wav	28009,7	2,825	27992,9	2,826
Среднее		29854,21	2,8185	29776,09	2,8108
СКО		1193,08	0,0650	1238,17	0,0684
29	1_4_0041.wav	29338,5	3,176	29284,4	3,172
30	1_4_0042.wav	30152,5	3,087	30165,6	3,088
31	1_4_0043.wav	32384,2	3,469	32330,9	3,465
32	1_4_0044.wav	30731,2	3,379	30809,7	3,394
33	1_4_0045.wav	31476,8	3,399	31486,1	3,403
34	1_4_0046.wav	30621,0	3,378	30637,6	3,382
35	1_4_0047.wav	32719,3	3,525	32762,0	3,540
36	1_4_0048.wav	32759,9	3,216	32762,7	3,216
37	1_4_0049.wav	33186,5	3,642	33152,9	3,638
38	1_4_0050.wav	30138,4	3,421	30183,5	3,427
Среднее		31350,83	3,3691	31357,55	3,3725
СКО		1340,98	0,1677	1335,40	0,1691

Здесь в 1-м положении изделия выполнено 8 опытов, а во всех других — по 10. После каждой серии опытов вычислены оценки положения и разброса параметров искомой экспоненты.

Анализ этих результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. Ранее сделанный вывод о нестабильности условий проведения экспериментов остаётся в силе.
2. В 4-м положении изделия скорость затухания свободных колебаний самая высокая. А во 2-м положении (диаметрально противоположном 4-му) — самая низкая.
3. Проведение при каждом фиксированном положении изделия серии опытов и последующее усреднение позволяют повысить надёжность результатов.
4. С учётом отмеченных ранее существенных различий в затухании частотных составляющих сигнала практическая ценность оценки затухания в целом по сигналу невелика. Эта оценка, однако, может пригодиться для упомянутого выше нормирования спектров.

На наш взгляд, приведенных примеров достаточно для иллюстрации работоспособности методики (проведение на базе этой методики обширного исследования целью настоящей статьи не являлось). Однако уже этот (пока небольшой) опыт практического применения методики привёл нас к некоторым обобщениям.

Так, нам представляется полезным введение в оборот понятия **начальный амплитудный спектр** свободных колебаний. Определим его как спектр, состоящий из почастотных оценок начальной амплитуды свободных колебаний, полученных по описанной выше методике. Мы полагаем, что начальный спектр (как полученный аппроксимацией совокупности спектров по всему сигналу и характеризующий спектральный состав сигнала в момент начала свободных колебаний) является лучшим представителем исходного сигнала, нежели любой другой спектр, полученный на каком-либо (произвольном) интервале этого сигнала. Именно начальный спектр и надо использовать на последующих этапах анализа при диагностике изделий методом свободных колебаний.

Однако формирование начального спектра требует аккуратности. Так, очевидным является следующее утверждение: оценку начальной амплитуды на каждой частоте надо формировать на интервале сигнала от момента возбуждения свободных колебаний до затухания этой частотной составляющей сигнала. Практически определение правой границы обрабатываемого интервала сигнала возможно по крайней мере двумя способами. Во-первых, для каждой частоты можно подобрать подходящее значение на основе анализа тенденции изменения амплитуды на этой частоте в нескольких первых спектрах сканирования (например, по точке затухания амплитуды до некоторой доли первоначального уровня сигнала или до некоторого абсолютного уровня). Во-вторых, для основных мод спектра это можно сделать путём последовательного исключения их вклада в итоговый сигнал: оценив параметры 1-й моды, вычесть из исходного сигнала соответствующий 1-й моде сигнал, затем по остатку аналогично учесть вклад 2-й моды (возможно, с попутным уточнением вклада 1-й моды) и т. д. Остановить процесс последовательного исключения мод можно при уменьшении энергии оставшегося сигнала до некоторой доли первоначальной энергии.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суть настоящей работы состоит в следующем:

1. Предложена методика оценки параметров затухания свободных колебаний.
2. Эта методика позволяет оценить искомые параметры как в целом по сигналу, так и на отдельных частотах.
3. Объектом почастотной оценки затухания в первую очередь должны быть основные моды спектра.
4. Скорость затухания свободных колебаний на основных модах спектра существенно различна.
5. На основе предложенной методики возможно формирование начального амплитудного спектра свободных колебаний.

На наш взгляд, начальный спектр является лучшим представителем анализируемого сигнала, нежели любой иной спектр.

6. При диагностике изделий методом свободных колебаний необходима стабильность условий проведения экспериментов.

Обеспечение такой стабильности может включать в себя комплекс мер организационного, технического и методического характера. К последним можно отнести такие меры, как повторное проведение экспериментов до достижения приемлемого разброса данных и (как средство преодоления оставшейся нестабильности) нормирование спектров каким-либо способом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки информации. – М.: Физматгиз, 1962, 352 с.
2. Аджи У. С., Тернер Р. Х. (Agee W. S., Turner R. H.). Применение методов помехоустойчивого оценивания в анализе данных о траекториях движения. В кн.: Устойчивые статистические методы оценки данных. Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1984, с. 86–105.
3. Ершов А. А. Стабильные методы оценки параметров: Обзор. Автоматика и телемеханика, 1978, № 8, с. 66–100.
4. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. Пер. с англ. – М.: Мир, 1989, 512 с.
5. Хьюбер П. Дж. (Huber P. J.). Робастность в статистике. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984, 304 с.