

И. Б. Старченко

Таганрогский государственный радиотехнический университет, Таганрог, Россия
e-mail: star@tsure.ru

Динамический хаос при распространении волн конечной амплитуды в воде

Получена 02.05.2006, опубликована 05.06.2006

Представлены результаты экспериментальных исследований динамики распространения и взаимодействия в воде акустических волн конечной амплитуды, которые проанализированы как традиционными методами, так и методами нелинейной динамики. Из данных измерений для различных условий (значений управляющего параметра) реконструированы фазовые портреты системы, которые затем сравнивались с теоретическими моделями. Выполнены численные оценки хаотичности системы: рассчитаны корреляционные размерности и спектр показателей Ляпунова.

ВВЕДЕНИЕ

«Линейность» редко является собственным свойством системы. В подавляющем большинстве случаев это результат упрощений реальных систем или пренебрежение членами высших порядков в уравнениях движения. Нелинейность водной среды используется для формирования «параметрических антенн» — разновидности гидроакустических средств, использующих для функционирования нелинейные свойства среды распространения [1]. Такие антенны можно рассматривать, как нелинейную систему с числом степеней свободы больше 2. Для их описания используются нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных, например уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова. Процессы распространения и взаимодействия в воде волн конечной амплитуды достаточно хорошо изучены и освещены в литературе [2, 3] и др. В данной работе предлагается новый подход к исследованию нелинейного взаимодействия волн: методы нелинейной динамики применены для обработки экспериментальных данных, что позволяет проследить эволюцию системы во времени и пространстве.

1. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методика проведения экспериментальных лабораторных исследований основывалась на традиционных методах гидроакустических измерений с учетом особенностей нелинейного взаимодействия волн [1]. Лабораторная установка включала излучающий электрический тракт (формирователь сигнала), акустический тракт (излучатель, гидрофон и водная среда) и приемный электрический тракт.

Параметры экспериментальной установки следующие: диаметр преобразователя 18 мм, центральная частота накачки 1254 кГц, разностная частота 50 кГц, напряжение на входе преобразователя 50 В, приемный гидрофон цилиндрический, диаметром 3 мм и резонансной частотой 10 МГц, диапазон расстояний 10–100 см с шагом 10 см. В эксперименте использовались два вида сигналов: синусоидальный монохроматический частотой 1254 кГц и биения двух частот 1229 кГц и 1279 кГц, формирующие в воде разностную частоту 50 кГц [1].

Особенностью приемного тракта явилось то, что запись сигналов осуществлялась на цифровой осциллограф DSO 2100. Он выполнен в виде внешней приставки к компьютеру, подключаемой через LPT порт. Основные характеристики прибора следующие: разрядность 8 бит, полоса пропускания 30 МГц (–3 дБ), объем памяти 32 Кб/канал, коэффициент вертикальной развертки 50 мВ/дел – 5 В/дел, точность по напряжению 3%, по времени — 0,01%, импеданс входного сигнала 1 МОм/25пФ, максимальное входное напряжение 100 В, коэффициент временной развертки 5 нс/дел – 320 с/дел, максимальная частота дискретизации 100 МГц; полоса пропускания анализатора спектра 0–50 МГц. Частота дискретизации осциллографа составила 10 МГц для разностного сигнала и 50 МГц для синусоидального сигнала первичных волн. Сигнал записывался в двух форматах: в виде графического файла (*.bmp) и текстового файла в формате ASCII. Затем данные обрабатывались с использованием как стандартного (Microsoft Excel, MathCAD), так и специального программного обеспечения (ПО). Примеры интерфейса с осциллограммами сигналов показаны на рис. 1, 2.

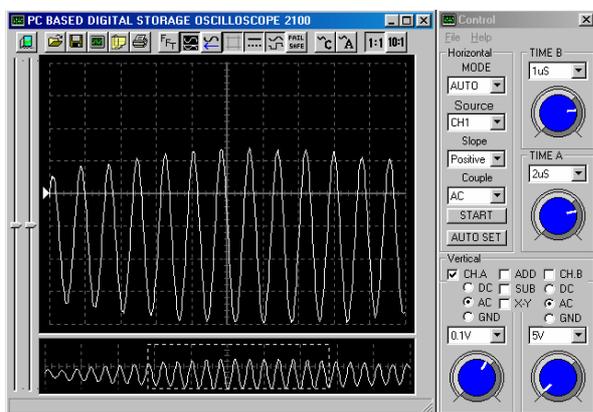


Рис. 1. Осциллограмма синусоидального сигнала на расстоянии 10 см от излучателя

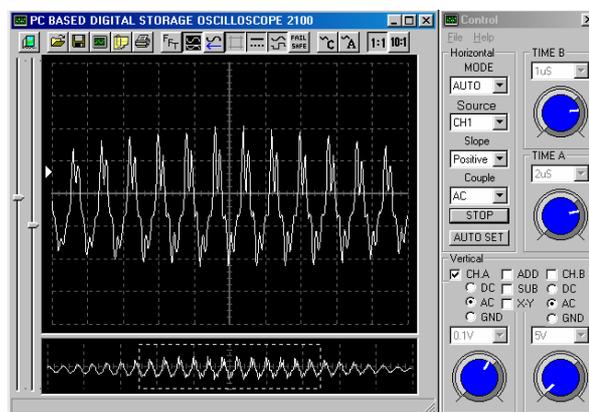


Рис. 2. Осциллограмма синусоидального сигнала на расстоянии 100 см от излучателя

2. МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Полученные в эксперименте сигналы обрабатывались как традиционными методами, так и методами нелинейной динамики. Одним из признаков хаотичности сигнала является усложнение его спектра, в котором появляются дополнительные гармоники и субгармоники. При этом сигнал становится как бы квазишумовым. Поэтому первоначально исследуют спектр Фурье сигнала.

Для исследования нелинейных систем широко используются фазовые портреты — графическое изображение траекторий движения изображающей точки на фазовой плоскости (или в общем случае в фазовом пространстве). В нелинейной динамике их называют аттракторы — области притяжения точек траекторий движения. Хаотические процессы характеризуются «странными аттракторами» [4], похожими на клубок запутанных ниток. Реконструкция аттракторов из временных рядов данных $[x(k t_0), k = 1, 2, \dots, n]$, где x — значение реализации в момент времени $k t_0$, t_0 — интервал дискретизации и n — число реализаций, осуществляется в соответствии с теоремой Такенса [5]:

$$x_k^{(m)} = [x(k t_0), x(k t_0 + \tau), \dots, x(k t_0 + (m-1)\tau)], \quad (1)$$

где m — внедренная размерность аттрактора в фазовом пространстве, определяющая количество степеней свободы системы, τ — время задержки, $\tau = i t_0$, $i \in n$.

В результате имеем множество точек $\mathbf{X}^m = (x_k^{(m)}, k = 1, 2, \dots, n - m)$ во внедренном пространстве R^m , которое представляет собой аттрактор. Полагая, что в диссипативной системе имеют место устойчивые осцилляции, получим, так называемый, псевдо-портрет.

Внедренная размерность m оценивается по теореме Мане [6] $m \geq 2D_2 + 1$, где D_2 — корреляционная размерность:

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \log C_m(r) / \log(r), \quad (2)$$

где r — длина грани m -мерного куба, $C_m(r)$ — корреляционный интеграл, для вычисления которого используется алгоритм Грассбергера-Прокаччия [7].

Кстати говоря, насыщение графика D_2 в зависимости от m является критерием того, является ли процесс шумовым (график возрастает) или хаотическим (график имеет пологий участок на некотором уровне D_2).

Выбор времени задержки τ в общем случае произволен и определяется характером решаемой задачи. Время задержки τ определяет степень «раскрытости» аттрактора, детализации его структуры. Обычно в качестве τ используют время, соответствующее какому-либо временному масштабу процесса [8], например, первому нулю автокорреляционной функции.

Количественной мерой хаотичности системы являются характеристические показатели [8] — экспоненты Ляпунова $[\lambda_m]$. Число экспонент определяется размерностью внедренного фазового пространства m , положительная максимальная экспонента λ_{\max} указывает на присутствие хаотических движений в системе при условии, что $m \geq 3$. Необходимой составляющей является оценка локальных Якобианов [9], т. е. линеаризованной динамики, которая управляет ростом бесконечно малых возмущений. Она определяется из прямых аппроксимаций линейных моделей типа $\varepsilon_{n+1} = a_n \varepsilon_n + b_n$, так что первый ряд Якобиана представляет собой вектор a_n и $(J)_{ij} = \delta_{i-1,j}$ для $i=2, \dots, m$, где m — внедренная размерность. Вектор a_n задается по методу наименьших квадратов $\sigma^2 = \sum_l (\varepsilon_{l+1} - a_n \varepsilon_l - b_n)^2$, где $\{\varepsilon_l\}$ — множество соседей ε_n [9].

3. АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

На рис. 3, 4 представлены спектры сигналов, использованных в эксперименте. По мере удаления от излучателя в обоих сигналах появляются гармоники. Для синусоидального сигнала, начиная с расстояния 30 см, возрастает вторая гармоника, а после 40 см идет лавинообразный рост высших гармоник, и на 100 см ясно различимы 8 гармонических составляющих (см. рис. 3).

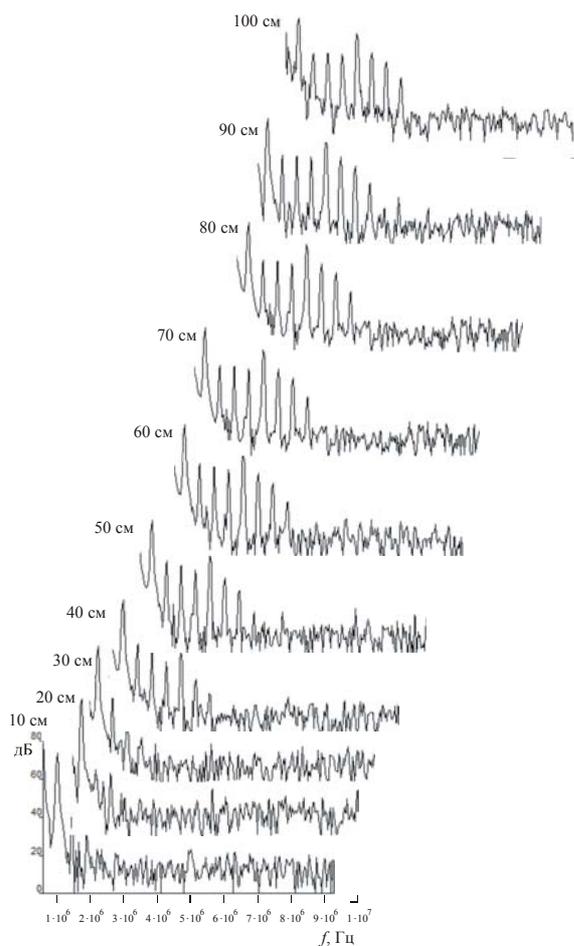


Рис. 3. Спектр синусоидального сигнала при удалении от излучателя на его оси

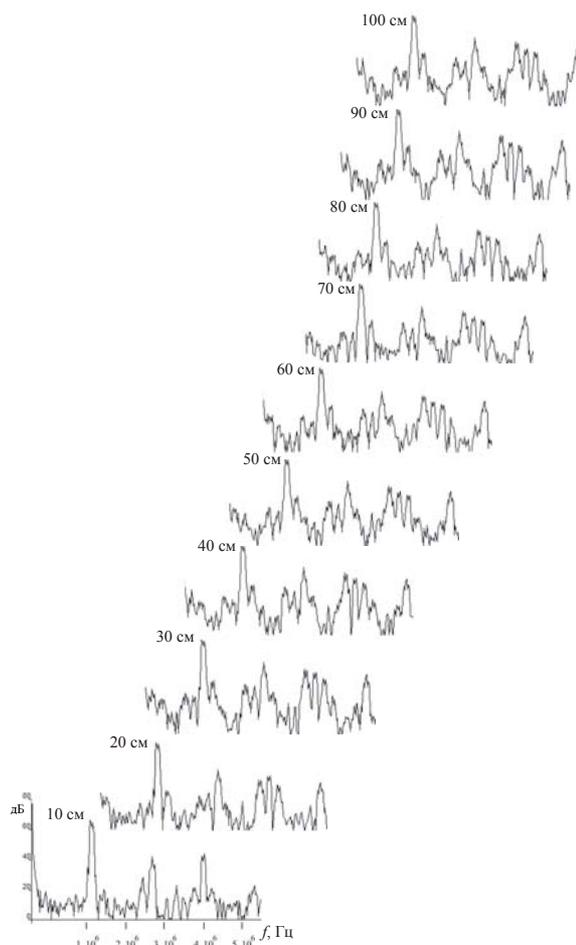


Рис. 4. Спектр биений при удалении от излучателя на его оси

Для сигнала биений двух частот гармоники исходного сигнала регистрируются уже на расстоянии 10 см от излучателя (см. рис. 4). Поскольку этот сигнал более сложный, чем синусоидальный, то в результате нелинейного взаимодействия образуются не только гармоники исходных частот, но и разностная, суммарная частоты, а также частоты, являющиеся результатом взаимодействия волн с вышеперечисленными частотами. Анализ спектров позволяет сделать вывод, что по мере удаления от излучателя сигналы претерпевают искажения, спектры имеют насыщенную структуру, что является первоначальным признаком хаотичности сигнала.

Далее по методу запаздывания [5] в соответствии с (1) были реконструированы фазовые портреты сигналов, показанные на рис. 5, 6.

На рис. 5, 6 показаны аттракторы синусоидального сигнала для двух времен задержки $\tau = 2t_0$ (рис. 5) и $\tau = 10t_0$ (рис. 6). Поскольку t_0 постоянная величина, обратная частоте дискретизации (см. выше), то далее для простоты она опущена. На рис. 5, 6 показана зависимость уровня звукового давления волны с частотой 1254 кГц от расстояния на оси излучателя. Местоположение точки измерения на кривой совмещено с центром полученного аттрактора. Таким образом, можно наблюдать, как изменяется форма аттрактора с расстоянием. Видно, что $\tau = 10$ является оптимальным для данного случая и аттрактор раскрыт полностью. Для $\tau = 2$ аттрактор виден под углом, поэтому окружность вблизи излучателя (см. рис. 6) трансформирована в эллипс (см. рис. 5). Однако на рис. 5 видно, что аттрактор имеет ряд петель, которые соответствуют гармоникам в сигнале.

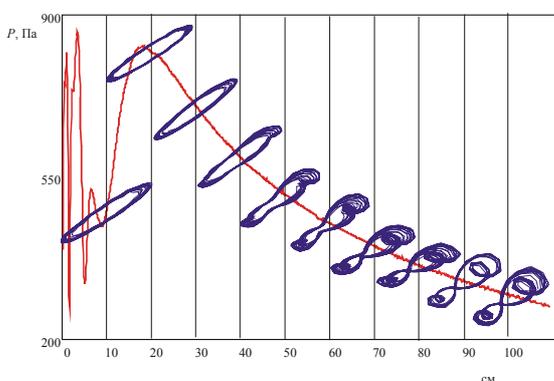


Рис. 5. Реконструированные аттракторы для синусоидального сигнала на различном расстоянии от излучателя для $\tau = 2$

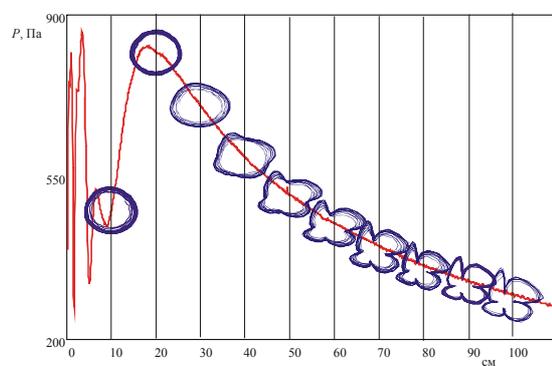


Рис. 6. То же, что и на рис. 5, только для $\tau = 10$

Полученные аттракторы нельзя классифицировать как странные, их вид больше подходит под определение трехмерного тора. Это говорит о квазихаотичной структуре синусоидального сигнала, распространяющегося в нелинейной среде и претерпевающего искажения. Также очевидно, что аттрактор имеет трехмерную структуру и разворачивается в пространстве в зависимости от выбора τ .

На рис. 7 показаны аттракторы для сигнала биений двух близких частот для двух времен задержек $\tau=47$ и $\tau=78$. Вид этих аттракторов полностью соответствует определению «странного аттрактора», хотя беспорядочной эту структуру не назовешь. Рядом на рис. 8 приведены рассчитанные аттракторы для модели биений двух частот.

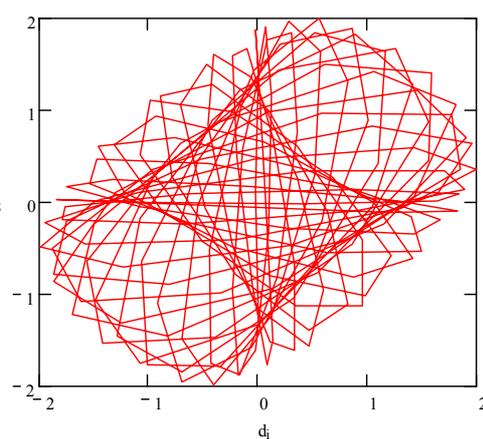
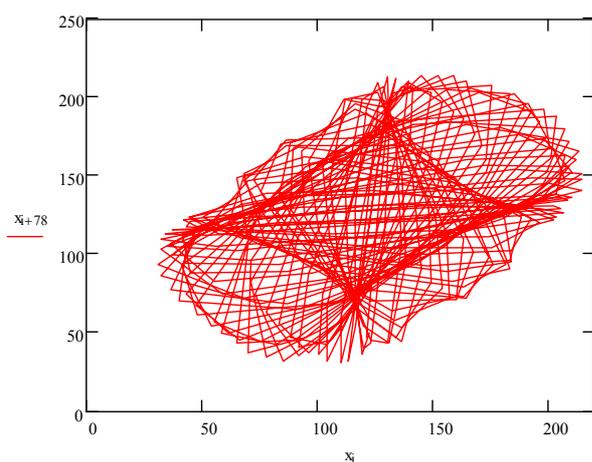
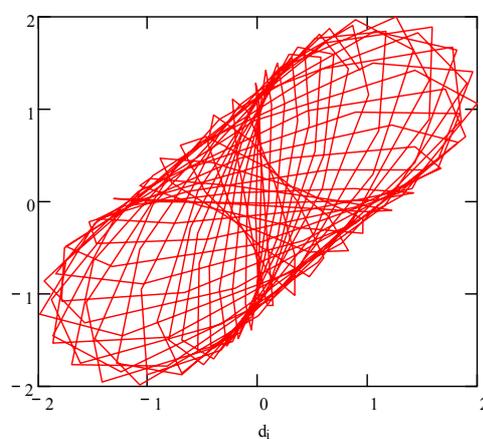
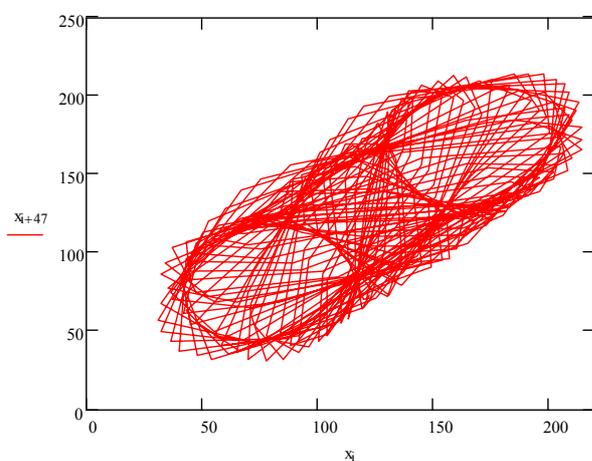


Рис. 7. Реконструированные аттракторы биений двух близких частот для различных задержек

Рис. 8. Теоретические аттракторы модели биений двух близких частот

Видно, что структуры экспериментально полученных и модельных аттракторов очень похожи. Данные аттракторы приведены для расстояния 10 см от излучателя, т. е. для неискаженного сигнала. К сожалению возможности имеющейся в наличии аппаратуры не позволили получить приемлемые и достоверные результаты для сигнала биения по мере удаления от излучателя. Этот вопрос остается открытым в настоящее время. Однако, аттракторы на рис. 7 уже свидетельствуют о присутствии динамического хаоса в данной системе.

Чтобы убедиться в этом, была проведена численная оценка хаотичности исследуемых сигналов путем вычисления корреляционной размерности и экспонент Ляпунова.

В таблице 1 приведены расчетные значения размерностей [10]: корреляционной D_2 , вычисленной с использованием алгоритма (2), и внедренной m , оцененной с помощью теоремы Мане как $m = 2D_2 + 1$. Значения m , использованные для расчета корреляционной размерности, *a priori* выбраны так, чтобы превышать реальные значения, и точнее определить насыщение графика корреляционного интеграла.

Таблица 1. Оценка изменения размерностей с расстоянием

Расстояние, см	Корреляционная размерность D_2		Внедренная размерность m	
	$\tau = 10, m = 5$ Синусоидальный сигнал	$\tau = 47, m = 8$ Биения двух частот	$\tau = 10, m = 5$ Синусоидальный сигнал	$\tau = 47, m = 8$ Биения двух частот
10	1,23	2,32	3,46	5,64
20	1,19	2,25	3,38	5,5
30	1,29	2,29	3,58	5,58
40	1,18	2,31	3,36	5,62
50	1,24	2,34	3,48	5,68
60	1,2	2,29	3,4	5,58
70	1,21	2,67	3,42	6,34
80	1,34	2,3	3,68	5,6
90	1,45	2,17	3,9	5,34
100	1,7	2,4	4,4	5,8

Корреляционная размерность синусоидального сигнала относительно монотонно растет с расстоянием и на расстоянии 100 см примерно на 30% больше первоначального значения. Внедренная размерность при этом больше 3, что говорит о теоретической возможности хаотических колебаний в системе. Корреляционная размерность биений двух частот больше примерно на единицу, чем у синусоидального сигнала, потому что каждая частота добавляет степень свободы в колебательную систему. Здесь нет устойчивого монотонного роста (на расстоянии 100 см превышение над первоначальным значением составляет всего около 4%, хотя максимальное отклонение на 70 см — 15%). Соответственно, внедренная размерность имеет значения больше 5, и такую систему с уверенностью можно назвать хаотической.

Результаты вычисления экспонент Ляпунова с использованием специализированного пакета [11] приведены на рис. 9, 10. Внедренная размерность в обоих случаях выбрана равной $m = 4$.

Из графиков видно, что максимальная экспонента Ляпунова положительна и в первом и во втором случае, что служит подтверждением хаотического характера динамики системы.

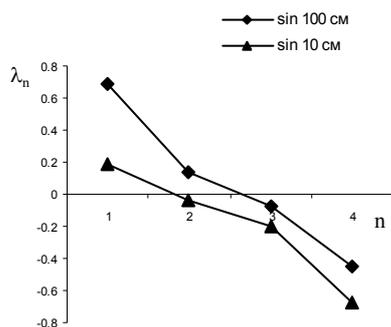


Рис. 9. Спектр Ляпунова для синусоидального сигнала

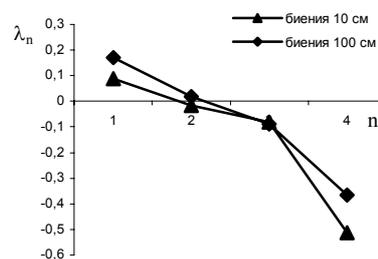


Рис. 10. Спектр Ляпунова для биений двух частот

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено исследование процессов нелинейного распространения и взаимодействия акустических волн в воде с точки зрения нелинейной динамики. Результаты экспериментов обработаны с помощью методов нелинейной динамики: из временных рядов реконструированы аттракторы, выполнены численные оценки корреляционного интеграла и спектра Ляпунова. Полученные результаты позволили сделать вывод, что в обоих исследуемых сигналах (монохроматическом синусоидальном и двухчастотном, в результате взаимодействия частот которого образуется разностная частота — огибающая в данном случае) присутствует динамический хаос. Оценки размерностей системы по мере удаления от излучателя иллюстрируют динамику зарождения хаоса во время нелинейного распространения и взаимодействия. Эти процессы можно рассматривать как каскад локальных неустойчивостей, которые выливаются в хаотическое поведение отдельных траекторий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. 264 с.
2. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной гидроакустики.
3. Зарембо Л. К., Тимошенко В. И. Нелинейная акустика. М.: Изд. МГУ, 1984. 104 с.
4. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence. Commun. Math. Phys. 20, 1971, p. 167–192.
5. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. Dynamical Systems and Turbulence, edited by D. A. Rand and L.-S. Young. Springer, Berlin, 1981, pp. 366–381.
6. Mañé R. On the dimension of the compact invariant sets of certain nonlinear maps. Dynamical Systems and Turbulence, edited by D. A. Rand and L.-S. Young. Springer, Berlin, 1981, pp. 230–242.

7. Grassberger P. and Procaccia I. Measuring the Strangeness of Strange Attractors. *Physica D* 9, 1983, p. 189.
8. Кузнецов С. П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001. 296 с.
9. Kantz H., Schreiber T. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
10. NLyzer. <http://www.physik.tu-darmstadt.de>
11. Dataplore package. <http://www.ixellence.com>