

С. В. Будрин

*ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова*

*Россия, 196158, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44, e-mail: [editor@ejta.org](mailto:editor@ejta.org)*

## Применение метода конечных волновых элементов для расчета упругих волн в разветвленных колебательных системах с учетом возможности распространения конечного числа волн в каждой ветви системы

*Получена 10.01.2007, опубликована 14.03.2007*

При создании инженерных конструкций подобных рамным разветвленным трубопроводам систем охлаждения, систем вентиляции и кондиционирования возникают проблемы расчета внешнего шума, создаваемого при работе этих установок. Первым шагом решения этой проблемы является расчет распределения уровней вибраций по таким системам. Настоящая работа посвящена разработке алгоритмов расчета распространения упругих волн по таким установкам.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] приведены алгоритмы расчета распространения упругих волн, полученные на основе метода конечных волновых элементов (МКВЭ) при распространении волн по неразветвленной конструкции при наличии произвольного числа каналов распространения упругих волн в отдельной ветви конструкции. В этой же работе указывалось, что при использовании алгоритмов МКВЭ для неразветвленных систем, имеется принципиальная возможность определения распределения векторов колебательных скоростей, т. е. кинематических переменных (KV) и векторов сил, моментов (т. е. динамических переменных (DV)) по разветвленным колебательным системам, имеющих конечное число узловых точек.

Порядок матриц импеданса или проводимости равен порядку матрицы импеданса, необходимому для полной характеристики распространения упругих волн в отдельной ветви конструкции, умноженному на число учитываемых ветвей с учетом особенностей распространения упругих волн в каждой ветви конструкции, входящих в состав рассматриваемого узла конструкции. Строго говоря, это число соответствует числу всех корней дисперсионного уравнения, описывающего процесс распространения упругих волн в рассматриваемом типе волнового элемента (ВЭ). Для большинства типов ВЭ вполне достаточно учитывать только распространяющиеся типы упругих волн.

Так, например, для ВЭ в виде слоя изотропного материала постоянной толщины и бесконечной протяженности достаточно учитывать распространение в слое продольных и сдвиговых волн.

Для тонкой бесконечной полосы постоянной ширины и толщины достаточно учитывать изгибные, продольные и сдвиговые волны. Таким образом, для расчета распространения упругих волн в полосе необходимо учитывать четыре кинематических и четыре динамических переменных, а именно:

- кинематические переменные, соответствующие скорости колебаний полосы по нормали к ее поверхности и скорости изменения угла поворота поперечного сечения полосы в плоскости распространения изгибных волн, а также двум скоростям, в направлениях, совпадающих с плоскостью пластины и соответствующим продольным и сдвиговым волнам, распространяющимся в полосе.
- динамические переменные соответствуют трем силам, действующим в трех взаимно перпендикулярных направлениях и изгибающему моменту при изгибных колебаниях полосы в плоскости распространения волн.

При выводе соотношений распространения упругих волн в разветвленных колебательных системах будем полагать, что при переходе от одного ВЭ к следующему ВЭ геометрические размеры конструкции изменяются только для одной из всех учитываемых ветвей конструкции. При соблюдении этого условия нет необходимости в выполнении операций, связанных с изменением порядка матриц импедансов и проводимостей при реализации алгоритмов расчета. Остальные ветви рассматриваемой конструкции не изменяют своей длины, но элементы матрицы их входного импеданса могут изменяться при переходе от одного ВЭ к следующему. В пределах каждого ВЭ порядок матриц импеданса или проводимостей системы остается постоянным, зависящим от геометрии рассматриваемой системы.

Изменение порядка матриц импеданса или проводимостей системы происходит только при изменении количества учитываемых независимых ветвей распространения упругих волн по колебательной системе. При разветвлении ВЭ системы порядок матриц импеданса или проводимостей системы увеличивается. При слиянии ВЭ системы порядок матриц импеданса или проводимостей системы уменьшается.

Прежде, чем приступить к расчету колебательной системы, необходимо определить для нее общее количество узлов системы  $NK$  и ориентировочно определить общее количество ВЭ, необходимое для ее расчета и задать их общее количество  $NKV$ .

$$NKV = NK + \sum_{i=1}^{NK} \sum_{j=1}^{NK} [A(i, j) \cdot N_k(i, j)], \quad (1)$$

где  $A(i, j) = 0$  при отсутствии связи между узлами  $i$ ,  $A(i, j) = 1$  при наличии связи между узлами  $i$  и  $j$ ,  $N_k(i, j)$  — количество ВЭ, на которые разбивается элемент связи между узлами  $i$  и  $j$ .

# 1. АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЯ УЗЛОВЫХ ТОЧЕК

В принципе расчет распространения упругих волн по разветвленной колебательной системе производится аналогично расчету распределения токов и напряжений в разветвленной электрической цепи при использовании метода расчета, основанного на последовательном исключении узловых точек цепи. Принципиальное отличие состоит в том, что в каждом элементе разветвленной электрической цепи реализуется одноканальное распространение энергии электрического тока. В качестве примера рассмотрим преобразование разветвленной электрической цепи с заданным количеством узловых точек схемы ( $NK$ ).

При  $NK = 5$  преобразование разветвленной электрической цепи с заданным количеством узловых точек схемы, в простейшую электрическую цепь, состоящую из одного сопротивления, производится следующим образом. Каждому ВЭ соответствует узловая точка цепи. Каждому соединению ВЭ соответствует электрическое сопротивление между соответствующими узловыми точками цепи. Каждая узловая точка связана с «землей» через соответствующее сопротивление (проводимость). Величины проводимостей однозначно связаны с соответствующими величинами сопротивлений или проводимостей для каждого соединения между узловыми точками. Разветвленную электрическую цепь любой сложности можно привести к простейшей цепи, содержащей один узел и одну проводимость.

Процесс приведения разветвленной электрической цепи к простейшей, проиллюстрирован на рис. 1. Он осуществляется путем последовательного исключения узлов из электрической схемы при использовании алгоритма, сущность которого состоит в следующем. Пусть из разветвленной электрической цепи необходимо исключить  $n$ -ую узловую точку. Для этого производятся вычисления в следующей последовательности (при этом общий алгоритм поясняется примером исключения 5-ой, 4-ой, 3-ей и 2-ой узловых точек для схемы, приведенной на рис. 1).

1. Вычисляется суммарная проводимость всех  $m$  элементов, соединенным с  $n$ -м узлом

$$Y_{sn} = \sum_{i=1}^m Y_{in}. \quad (2)$$

Для узла 5 это сумма проводимостей  $Y_{15}$ ,  $Y_{35}$ ,  $Y_{45}$  и  $Y_{55}$ .

2. Если узел  $k$  имеет связь с исключаемым узлом  $n$ , то его проводимость по отношению к «земле» будет равна

$$Y_{kk}^* = Y_{kk} + \frac{Y_{kn}Y_{nn}}{Y_{sn}}. \quad (3)$$

Узлы 1, 3 и 4 имеют связь с исключаемым узлом 5.

3. Если узел  $k$ , связанный с исключаемым узлом  $n$ , связан также с узлом  $m$ , также связанным с узлом  $n$ , то проводимость между узлами  $k$  и  $m$  будет равна

$$Y_{mk}^* = Y_{mk} + \frac{Y_{mn} Y_{kn}}{Y_{sn}}. \quad (4)$$

4. Если узел  $k$ , связанный с исключаемым узлом  $n$ , не связан с узлом  $m$ , связанным с узлом  $n$ , то узел  $k$  связывается с узлом  $m$  проводимостью, равной:

$$Y_{mk}^* = \frac{Y_{mn} Y_{kn}}{Y_{sn}}. \quad (5)$$

Для расчета разветвленной электрической цепи используются алгоритмы:

- Алгоритм преобразования соединения нескольких элементов, имеющих общую узловую точку, в соединение в виде замкнутого многоугольника, показанное на рис. 1.
- Алгоритмы, необходимые для расчета разветвленной электрической цепи, получаются на основании использования законов Кирхгофа для разветвленной электрической цепи, а также правил расчета сопротивлений при их последовательном и параллельном соединениях.

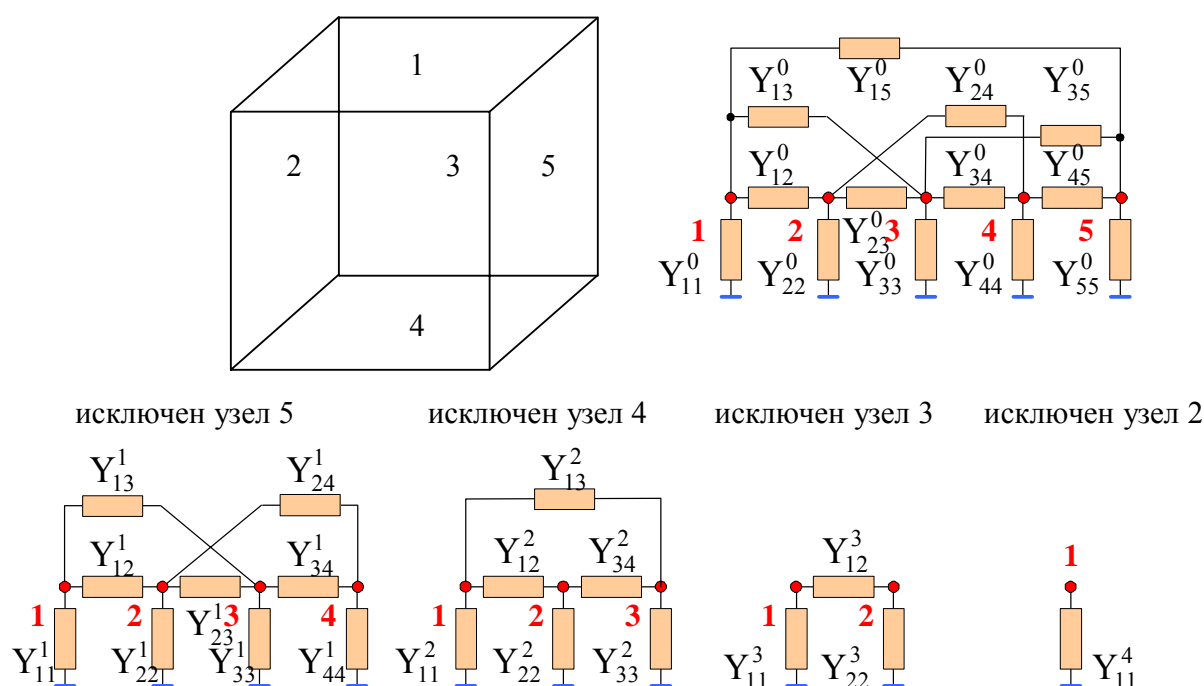


Рис. 1. Участок пространственной конструкции и его электрическая модель при учете одного типа упругих волн в элементах связи между узловыми точками конструкции (преобразование электрической схемы при последовательном исключении узловых точек)

## 2. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ВОЛНОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ РАЗВЕТВЛЕННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Для расчета распространения упругих волн по элементам сложных инженерных конструкций (ИК) в области низких и средних звуковых частот в практике создания этих конструкций применяется метод конечных элементов (МКЭ). Основные достоинства этого методов состоят в возможности производить расчеты вибраций ИК любой сложности. Вместе с тем этот метод имеет следующие ограничения:

- зависимость размеров элементов, на которые разбивается рассчитываемая конструкция, от длины упругих волн для однородных участков конструкции;
- необходимость производить дополнительное деление участков конструкции на отдельные элементы для правильного описания распространения упругих волн в местах расположения локальных неоднородностей рассчитываемой конструкции.

В процессе разработки новых конструкций применение МКЭ не является наиболее оптимальным способом решения поставленных задач, так как:

- отсутствует полная ясность о процессах распространения упругих волн по рассматриваемой конструкции;
- не ясно, как происходит взаимодействие между различными типами упругих волн;
- достаточно сложно выбрать оптимальный способ управления рассчитываемыми параметрами ИК.

По этим причинам, для описания процессов распространения вибраций, когда нет полной ясности о физической сущности происходящих явлений, предпочтительнее использовать точные методы, близкие к классическим подходам теории упругости. В этом случае имеется возможность контролировать:

- степень возбуждения колебаний элементов конструкции для любого типа волн;
- связь каждой формы колебаний с другими формами колебаний;
- распределение амплитуд колебаний каждого типа волн для всех элементов ИК;
- распределение и количественное соотношение между потоками энергии упругих волн во всех элементах конструкции для различных типов волн.

Такие методы расчета лучше позволяют понять физическую природу процессов, происходящих в рассчитываемой конструкции, и сформулировать принципы, на основании которых можно строить практические методики расчета интересующих параметров с применением МКЭ, а также разработать методы управления вибрационными и акустическими характеристиками рассматриваемых конструкций.

К числу таких методов следует отнести метод конечных волновых элементов (МКВЭ) [1], который является оптимальным способом применения метода граничных элементов (МГЭ). Необходимость разработки МКВЭ основывается на утверждении, сделанном в классической работе П. Бенерджи и Р. Баттерфилда по практическому

применению МГЭ [2], о том, что традиционные варианты применения МГЭ к одномерным системам не является эффективным.

По существу МКВЭ является рациональным способом применения МГЭ для расчета распространения упругих волн в сложных конструкциях, приводящихся к решению одномерных задач. В соответствии с МКВЭ:

- рассматриваемая конструкция разбивается на конечное число однородных элементов, размеры которых связаны не с длинами упругих волн в конструкции, а с выполнением условия однородности конструкции в пределах рассматриваемого волнового элемента (ВЭ);
- рассматривается отдельный однородный ВЭ бесконечной протяженности. Для этого элемента или элементов, если конструкция разбивается на ВЭ различного типа, решаются дисперсионные уравнения и определяются скорости всех нормальных волн, которые предполагается учитывать при решении задачи о распространении упругих волн по ВЭ неоднородной конструкции;
- параметры, характеризующие распространение упругих волн по неоднородной конструкции, разделяются на кинематические и динамические переменные ( $KV$  и  $DV$ ), и для всех переменных определяются коэффициенты их связи с неизвестными амплитудами нормальных волн. Связь между каждой  $DV$  и каждой  $KV$  описывается матрицей импедансов или матрицей проводимостей рассматриваемой однородной конструкции при соответствующем значении координаты;
- выводятся соотношения, определяющие порядок пересчета матриц импедансов (проводимостей) нагрузки отдельного ВЭ к входным матрицам импедансов (проводимостей) этого же ВЭ;
- на основании условий непрерывности векторов  $KV$  и равновесия векторов  $DV$  в месте контакта различных ВЭ, выводятся соотношения, определяющие порядок пересчета входных матриц импедансов нескольких ВЭ при их слиянии в один ВЭ к матрице импедансов нагрузки этого ВЭ;
- выводятся соотношения, определяющие порядок пересчета входной матрицы проводимостей волнового элемента при его разветвлении на несколько волновых элементов, к матрицам проводимостей нагрузки этих волновых элементов;
- на основании использования соотношений, полученных в трех предыдущих разделах, определяется матрица входных импедансов или проводимостей всей рассчитываемой конструкции в местах ее возбуждения динамическими или кинематическими внешними воздействиями;
- последовательно, от места возбуждения конструкции и до ее концов, определяются амплитуды нормальных волн для всех ВЭ рассматриваемой конструкции;
- в случае необходимости, определяется распределение  $KV$  и  $DV$  в пределах отдельного ВЭ или всех ВЭ конструкции, а также распределение потоков энергии всех упругих волн, распространяющихся в исследуемой конструкции.

Важными преимуществами МКВЭ по сравнению с другими подобными методами расчета неоднородных конструкций являются:

- оперирование с матрицами импедансов и проводимостей исключает переполнение ЭВМ в процессе выполнения расчетов, как это имеет место при использовании методов начальных параметров или прогонки при выполнении аналогичных расчетов и при наличии неоднородных волн в конструкции;
- возможность контролировать KV и DV для любой нормальной волны и потока энергии этих волн в любой точке рассчитываемой конструкции независимо от других нормальных волн;
- использование ограниченного количества относительно простых соотношений, необходимых для расчета распределения амплитуд скоростей колебаний и амплитуд динамических сил по сложным, неоднородным конструкциям;
- нет необходимости в решении систем уравнений, порядок которых пропорционален числу однородных элементов, на которые разбивается вся рассматриваемая конструкция. Максимальный порядок систем уравнений, которые необходимо решать при распространении упругих волн по разветвленной колебательной системе, равен числу амплитуд нормальных волн, учитываемых в процессе выполнения расчетов для отдельной ветви колебательной системы, умноженному на число независимых каналов распространения упругих волн в каждой из одновременно учитываемых ветвей конструкции.

При использовании МКВЭ можно рассчитывать вибрационные параметры следующих неоднородных колебательных систем:

- криволинейных стержневых систем (разветвленных и неразветвленных трубопроводов гидравлических систем различного назначения, колонн буровых установок с учетом влияния пульсаций бурового раствора и продольного натяжения, лопастей винтов, пружин произвольного вида и сложности, валов механических установок с произвольным распределением диаметров по длине и т. д.);
- приведения параметров стержней, имеющих сложное поперечное сечение, выполненное из тонкостенных элементов, к параметрам эквивалентных стержней с учетом волновых явлений в элементах их поперечных сечений;
- плоских и пространственных конструкций, состоящих из стержней произвольной формы и вида соединений их в конструкцию (буровых вышек, мостовых конструкций);
- систем тросовой подвески мостовых конструкций, тросовых буксировочных систем сложной формы и конструктивного исполнения и т. д.;
- многослойных корпусных конструкций с подкрепляющим набором в одном направлении;
- осесимметричных цилиндрических оболочек переменного радиуса и толщины с подкрепляющим набором и переборками;

- конструкций, состоящих из произвольной системы плоскопараллельных слоев, для определения их звукоизоляции, звукопоглощения, вибропоглощения и приведения их параметров к эквивалентным параметрам однородных колебательных систем.

Для проведения расчетов распространения упругих волн по ИК в области высоких частот и получения усредненных значений KV и DV по пространству и по частоте для всех ВЭ рассматриваемой конструкции более рациональным является применение энерго-статистических (ЭСМ) методов расчета виброакустических характеристик ИК, которые оперируют именно с такими усредненными характеристиками вибрационных и акустических полей. Условиями применимости ЭСМ методов расчета является установление для каждого ВЭ конструкции частотного диапазона существования диффузного поля упругих волн. Этот вопрос может быть решен при использовании МКВЭ. Для решения задач колебаний ИК в области низких и средних звуковых частот, т.е. частот, где обычно применяются МКЭ или МКЭ совместно МГЭ, важно установить какие переменные обязательно необходимо учитывать для обеспечения заданной точности расчетов, а какими можно пренебречь.

При решении задач излучения акустических волн ИК при использовании МКЭ и МГЭ важно установить, какие формы колебаний у рассматриваемой конструкции необходимо выделить на фоне других форм колебаний. Для решения этих задач также можно использовать МКВЭ. Для проведения расчетов при использовании МКВЭ для каждого типа ВЭ, на которые разбивается конструкция, необходимо определить связь KV и DV с амплитудами нормальных волн при распространении всех типов упругих волн, которые предполагается учитывать при расчете.

Общее выражение, связывающее KV и DV с амплитудами нормальных волн, можно представить в виде:

$$\begin{cases} U(m, x, i) = \sum_{k=1}^{2r} A(m, k, x, i) \cdot C(k, i), \\ Q(m, x, i) = \sum_{k=1}^{2r} B(m, k, x, i) \cdot C(k, i) \end{cases} \quad (6)$$

при  $m = 1, 2, \dots, r$ , где  $m$  — индекс KV или DV,  $k$  — индекс амплитуды нормальной волны,  $i$  — номер ВЭ,  $2r$  — количество независимых нормальных волн в рассматриваемом ВЭ равное количеству корней дисперсионного уравнения, которые учитываются при описании его колебаний.



Выражения (6) образуют систему  $2r$  алгебраических уравнений относительно  $2r$  неизвестных амплитуд нормальных волн  $C(k, i)$ . Реакция конструкции на ее возбуждение является свойством конструкции, определяемым ее импедансом или матрицей импедансов, и не зависит от способа ее возбуждения.

Если для описания колебаний конструкции необходимо  $r$  динамических и  $r$  кинематических переменных, импедансные характеристики конструкции описываются матрицей импедансов, порядок которой также равен  $r$ . Величина обратная импедансу называется проводимостью. Элементы входной матрицы импедансов и входной матрицы проводимостей следующим образом связывают кинематические и динамические переменные:

$$\begin{aligned} Q(m, 0, i) &= \sum_{t=1}^r [Z(m, t, 0, i) \cdot U(t, 0, i)], \\ U(m, 0, i) &= \sum_{t=1}^r [Y(m, t, 0, i) \cdot Q(t, 0, i)], \end{aligned} \quad (7)$$

$$m = 1, 2, \dots, r.$$

Одними из основных соотношений, используемых в МКВЭ, являются соотношения пересчета элементов матрицы импедансов нагрузки для  $i$ -го ВЭ к элементам входной матрицы импедансов этого же ВЭ.

Для решения поставленной задачи воспользуемся выражением (6). Для решения этой системы необходимо задать  $2r$  граничных условий, но такой возможности нет, так как рассматриваемый  $i$ -ый ВЭ совершает связанные колебания со всей системой ВЭ, из которых состоит конструкция. Задавая матрицу импедансов нагрузки, мы задаем  $r$  граничных условия из  $2r$  граничных условий, необходимых для определения всех  $C(k, i)$ . Однако, этого оказывается достаточным для решения рассматриваемой задачи. Допустим, что нам заданы еще  $r$  граничных условия, а именно  $r$  КВ на входе ВЭ, т. е. заданы  $U(m, 0, i)$ . При этом условии, имеется возможность выразить все неизвестные амплитуды нормальных волн  $C(k, i)$  через переменные  $U(m, 0, i)$  и величины элементов матрицы импедансов нагрузки. Далее, зная  $C(k, i)$ , можем выразить любые переменные для рассматриваемого ВЭ на любом его конце через  $U(m, 0, i)$ . Следовательно, можем выразить DV на входе ВЭ, т. е.  $Q(m, 0, i)$  через  $U(m, 0, i)$ . Элементы матрицы импедансов на входе  $i$ -го ВЭ получим, группируя слагаемые с одинаковыми индексами  $m$  у переменных  $U(m, 0, i)$  в выражении для  $Q(m, 0, i)$ .

После подстановки в (6) элементов матрицы нагрузки  $i$ -го ВЭ  $Z(m, t, x, i)$  и  $U(m, 0, i)$  получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{2r} [D(j, k, i) \cdot C(k, i)] = F(j, i) \quad (8)$$

при  $j = 1, 2, \dots, 2r$ ,

где

$$D(j, k, i) = \begin{cases} A(j, k, 0, i) & \text{при } j = 1, 2, \dots, r; \\ B(j - r, k, 1, i) - \sum_{h=1}^r A(h, k, 1, i) \cdot Z(j - r, h, 1, i) & \text{при } j = r + 1, r + 2, \dots, 2r. \end{cases} \quad (9)$$

Элементы правой части системы (8) равны:

$$F(j, i) = \begin{cases} U(j, 0, i) & \text{при } j = 1, 2, \dots, r, \\ 0 & \text{при } j = r + 1, r + 2, \dots, 2r. \end{cases} \quad (10)$$

Определим  $C(k, i)$ , обращая матрицу, соответствующую системе уравнений (8):

$$C(k, i) = \sum_{j=1}^r [DI(k, j, i) \cdot F(j, i)] \quad (11)$$

при  $k = 1, 2, \dots, 2r$ , где  $DI(k, j, i)$  — элементы обратной матрицы, соответствующей системе (8).

Подставляя  $F(j, i)$  в (11) можем определить

$$C(k, i) = \sum_{j=1}^r [DI(k, j, i) \cdot U(j, 0, i)], \quad (12)$$

$k = 1, 2, \dots, 2r$ .

Зная  $C(k, i)$ , с учетом (11), выразим  $Q(m, 0, i)$  через  $U(m, 0, i)$ :

$$Q(m, 0, i) = \sum_{k=1}^{2r} \left[ B(m, k, 0, i) \cdot \sum_{j=1}^r [DI(k, j, i) \cdot U(j, 0, i)] \right]. \quad (13)$$

Группируя слагаемые в соответствии с выражением (7) определим искомые элементы входной матрицы импедансов ВЭ:

$$Z(m, t, 0, i) = \sum_{k=1}^{2r} [B(m, k, 0, i) \cdot DI(k, t, i)], \quad (14)$$

$m = 1, 2, \dots, r$  и  $t = 1, 2, \dots, r$ .

Аналогичные соотношения можно записать при определении входной матрицы проводимости по заданной матрице приводимости нагрузки этого же ВЭ.

Из последнего выражения видно, что элементы входной матрицы импедансов действительно определяются только через заданные величины элементов матрицы импедансов нагрузки и коэффициенты связи между KV и DV и амплитудами нормальных волн.

Порядок пересчета входных импедансов нескольких ВЭ при их слиянии в один ВЭ к матрице импедансов нагрузки этого ВЭ определяется по соотношениям, полученным

при использовании условий непрерывности векторов  $KV$  для ВЭ, образующих узел соединения и равновесия векторов  $DV$ , действующих в узле соединения.

В более конкретной формулировке этот порядок пересчета можно изложить как определение матрицы импеданса нагрузки  $i$ -го ВЭ по заданным входным матрицам импеданса всех ВЭ, сливающихся в  $i$ -ый ВЭ.

Решение этой задачи включает в себя выполнение следующих операций:

- $DV$  на выходе  $i$ -го ВЭ выражаются через  $DV$  на входе  $n(i)$  ВЭ, которые сливаются в  $i$ -ый ВЭ, на основании условия равновесия векторов  $DV$  всех ВЭ, входящих в соединение;
- $DV$  на входе  $n(i)$  ВЭ по заданным входным матрицам импедансов этих ВЭ выражаются через  $KV$  входе этих же ВЭ;
- $KV$  на входе  $n(i)$  ВЭ, сливающихся в  $i$ -ый ВЭ, на основании условия непрерывности векторов всех  $KV$  выражаются через  $KV$  на выходе  $i$ -го ВЭ;
- искомые элементы матрицы импедансов нагрузки для  $i$ -го ВЭ находятся из выражения, полученного в предыдущем пункте, путем группировки для каждой  $DV$  на выходе  $i$ -го ВЭ слагаемых при одинаковых  $KV$  на выходе этого же ВЭ в соответствии с выражением (7).

Порядок пересчета входной матрицы проводимости  $i$ -го ВЭ при его разветвлении на  $n(i)$  ВЭ к матрице проводимостей нагрузки всех ВЭ, на которые разветвляется  $i$ -ый ВЭ, также определяется по соотношениям, полученным при использовании условий непрерывности векторов  $KV$  для всех ВЭ, образующих узел ветвления и равновесия векторов  $DV$ , действующих в узле соединения. Порядок пересчета состоит в определении матрицы проводимости нагрузки  $i$ -го ВЭ по заданным входным матрицам проводимости всех ВЭ, на которые разветвляется  $i$ -ый ВЭ.

Последовательность выполнения операций аналогична изложенной при рассмотрении случая слияния нескольких ВЭ в один ВЭ с учетом отличия процесса разветвления ВЭ от процесса слияния нескольких ВЭ в один.

Из изложенного следует, что для расчета распространения упругих волн различного типа по сложным инженерным конструкциям с применением МКВЭ необходимо:

- определить связь  $KV$  и  $DV$  с амплитудами нормальных волн, учитывая, какие нормальные волны распространяются в конструкции;
- записать соотношения для стыковки ВЭ с учетом конкретной геометрии этого узла;
- остальные алгоритмы МКВЭ одинаковы для любых конструкций.

Дальнейшим развитием МКВЭ является метод конечных импедансных элементов МКИЭ, сущность которого изложена в работе [3].

---

ЛИТЕРАТУРА

1. Будрин С. В. Особенности применения метода конечных волновых элементов для расчета колебаний сложных инженерных конструкций. Труды международной конференции по вибрациям механизмов. Издательство ИМАШ РАН, Москва 2001.
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М., «МИР», 1984.
3. Будрин С. В. Расчет вибрационных параметров инженерных конструкций при использовании метода граничных импедансных элементов. Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, выпуск 30 (314). Санкт Петербург, 2006.