

А. М. Гаврилов

*Технологический институт Южного Федерального университета в г. Таганроге
347928 Ростовская обл., Таганрог, ГСП-17А, пер. Некрасовский 44
e-mail: gavr_am@mail.ru*

Геометрическая дисперсия в сферически расходящемся гауссовом пучке

Получена 20.12.2007, опубликована 27.12.2007

Анализируются пространственные характеристики гармонической волны в звуковых пучках, создаваемых в однородной бездисперсионной среде сферически выпуклым осесимметричным излучателем с гауссовым распределением амплитуды. В рамках квазиоптического приближения для пучков с узким угловым спектром рассмотрено совместное влияние геометрической расходимости и дифракции волны на амплитудно-фазовую структуру поля, пространственную динамику дисперсионного параметра и фазовых искажений в спектре узкополосной трехчастотной волны

Ключевые слова: дифракция, геометрическая дисперсия, дисперсионный параметр, фазовый инвариант, характеристика направленности, фазовые искажения, фазовый синхронизм.

ВВЕДЕНИЕ

Под геометрической дисперсией волновых пучков понимается частотная зависимость фазовой скорости монохроматической волны, распространяющейся в однородной бездисперсионной среде в виде локализованного в пространстве волнового возмущения [1, 2]. Не будучи связанной с физическими свойствами среды, внешними границами или неоднородностями, ее проявление обусловлено дифракцией и зависит исключительно от исходных геометрических характеристик волны, излучаемой источником ограниченных размеров.

В отличие от оптики, где из-за большой разницы между поперечным размером пучка и длиной волны дифракционные процессы проявляются на больших расстояниях и во многих задачах их можно не принимать во внимание, в акустике из-за использования существенно меньших частот это соотношение не столь велико. Такое положение сохраняется, несмотря на существующее различие в значениях скорости электромагнитных и акустических волн. Поэтому в звуковых пучках дифракция начинает проявляться практически сразу в процессе распространения волны, что делает необходимым учет ее влияния с достаточно малых удалений от излучателя даже на высоких для акустики частотах.

Формальным подтверждением правомерности представлять результаты проявления дифракционных процессов в терминах дисперсии может служить взаимосвязь между дифракционным набегом фазы $\varphi_\partial(z, \omega)$ монохроматической волны в пучке и величиной ее фазовой скорости $c(z, \omega)$

$$c(z, \omega) \cong \frac{c_0}{1 - (c_0/\omega) \cdot \partial\varphi_\partial(z, \omega)/\partial z} \cong c_0 \left[1 + \frac{c_0}{\omega} \cdot \frac{\partial\varphi_\partial(z, \omega)}{\partial z} \right] = c_0 + \Delta c(z, \omega), \quad (1)$$

справедливое при условии малых изменений скорости, т.е. $c(z, \omega) \gg z \partial c(z, \omega)/\partial z$, имеющем место в дифрагирующих пучках. Здесь c_0 — скорость плоской волны; $\Delta c \ll c_0$; $\Delta c(z, \omega)$ — добавка к фазовой скорости, которая связана с проявлением дифракции; z — пространственная координата распространения волны. Из выражения (1) следует пространственная зависимость фазовой скорости неоднородной волны, что является одной из особенностей геометрической дисперсии в пучках. Это качественно отличает рассматриваемый случай от дисперсии в одномерных волноводах (мелкое море, трубы, стержни, пластины и др.), предполагающих постоянство дисперсионных свойств вдоль акустического поля. Поэтому известные подходы к изучению дисперсии, основанные на абсолютных и относительных измерениях скорости звука здесь неприменимы, что требует разработки специальных методов ее регистрации [2 – 6].

Рассмотрение дисперсионных свойств пучков представляет интерес для ряда традиционных областей применения ультразвука, использующих импульсные и модулированные волны, при рассмотрении нелинейных процессов в неоднородных волнах [1, 7–9], в измерениях физической [10] и нелинейной [11] дисперсии. В последнее время наблюдается интерес к использованию искусственно создаваемой [12] и естественной (волноводы) [13] дисперсии для временной компрессии импульсов. Однако в акустике редко удается воспользоваться естественно существующей дисперсией, а искусственное создание условий для ее проявления часто оказывается технически трудноразрешимой проблемой.

В связи с этим встает вопрос о возможности практического использования геометрической дисперсии волновых пучков, что предполагает необходимость ее теоретического и экспериментального исследования. Многообразие применяемых на практике пучков и возможных способов использования геометрической дисперсии выводит вопрос ее изучения за рамки какого-либо частного случая. Ранее теоретически [14] и экспериментально [2] были рассмотрены дисперсионные свойства осесимметричных пучков с гауссовым, полиномиальным и равномерным начальным распределением амплитуды, излучаемых плоским источником. Среди характерных особенностей отмечаются локализация дисперсии пределами области дифракции Френеля, сильная зависимость ее пространственной структуры от амплитудного распределения на излучателе, пространственные осцилляции дисперсионного параметра, сопровождающиеся изменениями не только его величины, но и знака, что получило подтверждение в эксперименте.

Для расширения возможности влияния на пространственную структуру и величину дисперсии интерес представляет использование такого фактора, как геометрическая расхожимость волны, задаваемая кривизной излучателя. Наглядное представление о проявлениях геометрической дисперсии пучка при совместном проявлении дифракции и геометрической расхожимости волны можно получить на примере гауссова пучка, для которого могут быть получены аналитические решения [1].

Целью данной работы является рассмотрение пространственных и дисперсионных свойств осесимметричных гауссовых пучков, создаваемых в однородной бездисперсионной среде сферически выпуклыми излучателями различной кривизны и сравнение их с ранее рассмотренным случаем квазиплоской волны [14]. Для более ясного понимания особенностей проявления геометрической дисперсии представляет интерес проведение анализа амплитудно-фазовой структуры поля, пространственная динамика которой также обусловлена процессами дифракции и геометрической расхожимости.

1. АМПЛИТУДНО-ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Для рассмотрения свойств ультразвуковых пучков с узким угловым спектром воспользуемся квазиоптическим приближением, где дифракция рассматривается как поперечная диффузия комплексной амплитуды [15] вдоль фронта приблизительно плоской волны $P(x, y, z)\exp[i(\omega t - kz)]$, радиус кривизны фронта которой существенно больше длины волны, а относительное изменение амплитуды вдоль фронта мало на расстояниях порядка длины волны. В такой постановке задачи характеристики монохроматических пучков в однородной среде описываются параболическим уравнением дифракции:

$$\Delta_{\perp} P - \frac{1}{D_d} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

где $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа по поперечным координатам; $D_d = 1/2ik$ — мнимый коэффициент диффузии; $k = \omega/c_0$; z — ось, совпадающая с направлением распространения волны. Для пучков с осевой симметрией общее решение уравнения (2) для комплексной амплитуды звукового давления волны $P(r, z)$ в произвольной точке параксиальной области поля может быть представлено через ее значение $P(r, 0)$ в плоскости $z = 0$ на входе среды [14]:

$$P(r, z) = (ik/z) \exp(-ikr^2/2z) \int_0^{\infty} P(r_0, z=0) \exp(-ikr_0^2/2z) J_0(kr_0 r/z) r_0 dr_0, \quad (3)$$

где $x^2 + y^2 = r^2$; $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$; $\xi^2 + \eta^2 = r_0^2$; $\xi = r_0 \cos \varphi$; $\eta = r_0 \sin \varphi$.

Здесь (ξ, η) и (r_0, φ) — декартовы и полярные координаты произвольной точки на поверхности излучателя, совмещенного с плоскостью $z = 0$; (x, y) и (r, θ) — декартовы и полярные координаты точки наблюдения в плоскости, перпендикулярной оси пучка на расстоянии z .

Исходное возмущение для сферически расходящегося пучка удобно представить произведением функции $f(r) = \exp(-r^2/a^2)$, отражающей распределение амплитуды по поверхности излучателя, и экспоненты, показатель которой характеризует исходную форму фазового фронта [1]:

$$P(r,0) = A_0 f(r) \exp(-ikr^2/2R_0), \quad (4)$$

где a — радиус апертуры излучателя; A_0 — амплитуда в точке $\{r, z\} = 0$; R_0 — радиус кривизны излучателя. Анализ влияния дифракции и геометрической расходимости на характеристики пучка упрощается, если воспользоваться безразмерными переменными и параметрами:

$$z_n = z/l_\phi = 2z/ka^2; \quad \delta_0 = l_\phi/R_0 = ka^2/2R_0; \quad r_n = r/a; \quad P_n(r_n, z_n) = P(r_n, z_n)/A_0,$$

где $l_\phi = ka^2/2$ — протяженность области дифракции Френеля (ближней зоны) пучка; δ_0 — начальная ($z_n = 0$) кривизна волнового фронта, отнесенная к дифракционной длине пучка. После подстановки граничного условия (4) в решение (3) получаем

$$P_n(r_n, z_n) = \frac{2i}{z_n} \exp\left(-\frac{ir_n^2}{z_n}\right) \int_0^\infty f(r_{n0}) \exp\left[-\frac{ir_{n0}^2(1+\delta_0 z_n)}{z_n}\right] J_0\left(\frac{2r_{n0}r_n}{z_n}\right) r_{n0} dr_{n0}. \quad (5)$$

В оптике условиями $\delta_0 \gg 1$, $\delta_0 \ll 1$ и $\delta_0 \approx 1$ принято характеризовать соответственно сильно, слабо и умеренно расходящиеся поля [16]. Выражение для поля плоского излучателя следует из (5) при $\delta_0 = 0$. Для функции $f(r_n) = \exp(-r_n^2)$ интеграл в (5) берется точно:

$$P_n(r_n, z_n, \delta_0) = \frac{1}{1+\delta_0 z_n - iz_n} \exp\left(-r_n^2 \frac{1+i\delta_0}{1+\delta_0 z_n - iz_n}\right). \quad (6)$$

Благодаря экспоненциальной форме записи граничного условия

$$P_n(r_n, z_n = 0) = \exp[-r_n^2(1+i\delta_0)],$$

решение параболического уравнения для сферически расходящегося гауссового пучка (6) можно получить, не обращаясь к выражению (5). Достаточно в решении [1]

$$P_n(r_n, z_n) = 1/(1-iz_n) \exp[-r_n^2/(1-iz_n)] \quad (7)$$

для плоского излучателя с гауссовым распределением амплитуды произвести замену

$$1/a^2 \rightarrow (1+i\delta_0)/a^2. \quad (8)$$

В выражении (7) замена (8) равносильна преобразованию координат:

$$r_n^2 \rightarrow r_n^2(1+i\delta_0); \quad z_n \rightarrow z_n(1+i\delta_0). \quad (9)$$

Действительная амплитуда и дифракционный набег фазы волны согласно (6) равны

$$|P_n(r_n, z_n, \delta_0)| = \frac{1}{\sqrt{(1+\delta_0 z_n)^2 + z_n^2}} \exp\left[-\frac{r_n^2}{(1+\delta_0 z_n)^2 + z_n^2}\right]; \quad (10)$$

$$\varphi_\phi(r_n, z_n, \delta_0) = \arctg\left(\frac{z_n}{1+\delta_0 z_n}\right) - r_n^2 \frac{z_n + \delta_0(1+\delta_0 z_n)}{(1+\delta_0 z_n)^2 + z_n^2}. \quad (11)$$

Осевые ($r_n = 0$) распределения амплитуды, представленные на рис. 1-а в двойном логарифмическом масштабе, имеют два характерных участка. Пологий участок в ближней области пучка сменяется по мере роста z_n областью сферической расходимости волны ($|P_n| \sim 1/z_n$), где приведенные кривые имеют линейный закон спада с крутизной минус 20 дБ на декаду изменения расстояния. С увеличением δ_0 протяженность ближней области z_n^* сокращается при сохранении общего поведения рассматриваемой зависимости. Если z_n^* определить как расстояние, где амплитуда на оси уменьшается в $1/\sqrt{2}$ раз, тогда

$$z_n^* = 1 / \left(\sqrt{1 + 2\delta_0^2} + \delta_0 \right).$$

В отличие от амплитуды основные изменения дифракционного набега фазы происходят на начальном участке осевого распределения $z_n \in (0 \dots z_n^*)$, далее зависимость $\varphi_\delta(r_n = 0; z_n)$ выходит на пологий участок, где при $z_n \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к величине (см. рис. 1-б)

$$\varphi_\delta(z_n \rightarrow \infty) \cong \arctg(1/\delta_0). \quad (12)$$

Уменьшение z_n^* и дифракционного набега фазы, наблюдаемые при увеличении δ_0 , указывает на ослабление дифракционных процессов, вызванное ростом начальной геометрической расходимости волны. В предельном случае $\delta_0 \rightarrow \infty$ дифракция не проявляется, поскольку излучатель изначально работает как источник сферической волны.

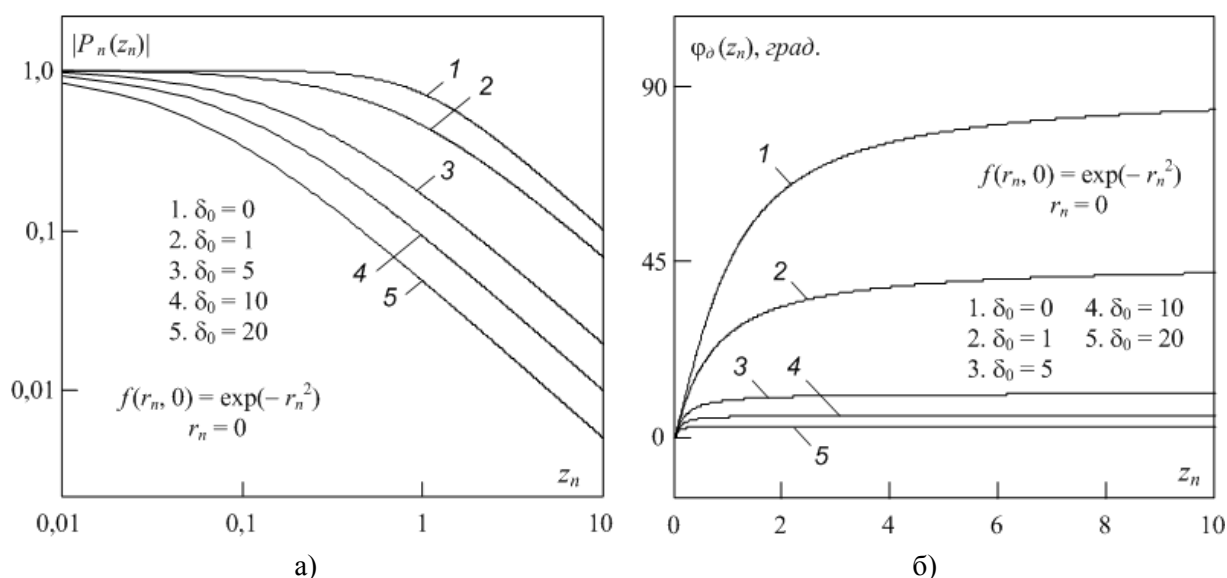


Рис. 1. Осевые распределения амплитуды (а) и фазы (б) волны при разных значениях кривизны излучателя δ_0

Динамика изменения поперечных распределений амплитуды и фазы в поле плоского ($\delta_0 = 0$) и выпуклого ($\delta_0 = 5$) излучателей согласно (10) и (11) показана на рис. 2. На примере зависимостей $|P_n(r_n)|/|P_n(0)|$ прослеживается общая тенденция к “расплыванию” пучка с увеличением расстояния z_n . Степень наблюдаемых изменений и расстояние от излучателя для их проявления существенно зависят от кривизны излучателя. В ближней области ($z_n < 1$) поля плоского излучателя изменения поперечного распределения нормированной амплитуды весьма незначительны (кривые 1 и 2) и начинают существенно проявляться лишь в области дифракции Фраунгофера ($z_n > 1$), кривая 3. Если структура поля плоского излучателя определяется исключительно дифракционными процессами, то на формирование поля выпуклого излучателя дополнительное влияние оказывает геометрическая расходящая волна, определяемая кривизной излучающей поверхности. Под ее влиянием поперечные размеры пучка начинают расти соразмерно δ_0 уже на малых расстояниях от излучателя (кривые 4 и 5), где дифракционное расхождение квазиплоской волны еще не наблюдается (кривые 1 и 2). Тем не менее, за пределами ближней области с увеличением z_n соотношение между поперечными размерами поля плоского и выпуклого излучателей стабилизируется: на расстояниях $z_n \gg 1$ эта величина равна $K = \sqrt{1 + \delta_0^2}$, кривые 3 и 6. Таким образом, кривизну излучателя можно рассматривать как фактор, усиливающий поперечную расходящуюся волна в K раз.

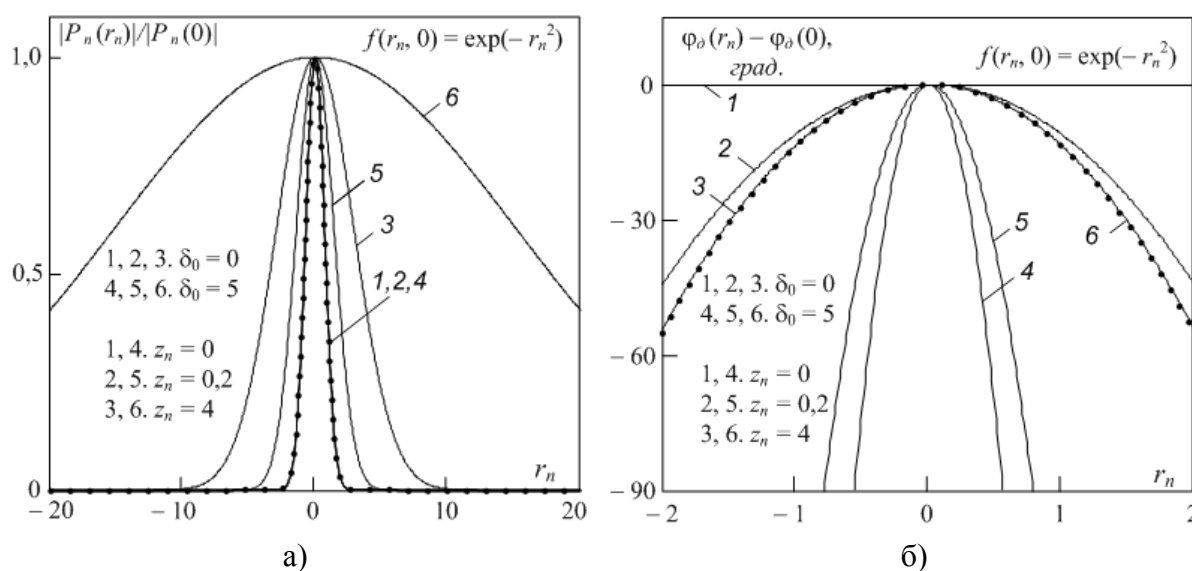


Рис. 2. Динамика поперечных распределений амплитуды и фазы с расстоянием

Если влияние кривизны излучателя, оказываемое на поперечное распределение амплитуды, сводится главным образом к количественным соотношениям (K) и сохраняется в дальней области поля, то для аналогичных зависимостей дифракционного набега фазы $\varphi_e(r_n)$, приведенного к его осевому значению $\varphi_e(r_n = 0)$,

это влияние имеет качественно иной характер, рис. 2-б. В поле плоского излучателя исходный фазовый фронт (линия 1), совпадающий с плоскостью $z_n = 0$, искривляется в процессе распространения волны, принимая на расстояниях $z_n = 0,2$ и $z_n = 4$ вид, показанный кривыми 2 и 3. Иначе трансформируется форма волны в звуковом пучке выпуклого излучателя, где исходный фронт (кривая 4) стремится с ростом z_n уменьшить свою кривизну (кривые 5 и 6). Это значит, что деформация фазового фронта в процессе распространения квазиплоской и квазисферической волн происходит в противоположных направлениях. Поэтому вполне закономерно, что на расстоянии $z_n = 4$ кривые 3 и 6, соответствующие $\delta_0 = 0$ и $\delta_0 = 5$, практически совпадают и продолжают повторять друг друга при дальнейшем увеличении z_n . Следовательно, с переходом в дальнюю область поля фазовый фронт утрачивает свою зависимость от кривизны излучающей поверхности, принимая вид сферически расходящейся волны, форма которой определяется исключительно дифракцией.

Одной из характерных особенностей гауссового пучка, отличающих его от пучков с резко выраженной границей, является монотонная зависимость амплитуды от δ_0 на всем протяжении распространения волны, рис. 3. Гладкий вид амплитудного распределения $f(r_n)$ в граничном условии и отсутствие явной границы с областью тени исключают появление в зависимостях $|P_n(\delta_0)|$ локальных экстремумов, обусловленных интерференцией боковых зон Френеля на поверхности излучателя.

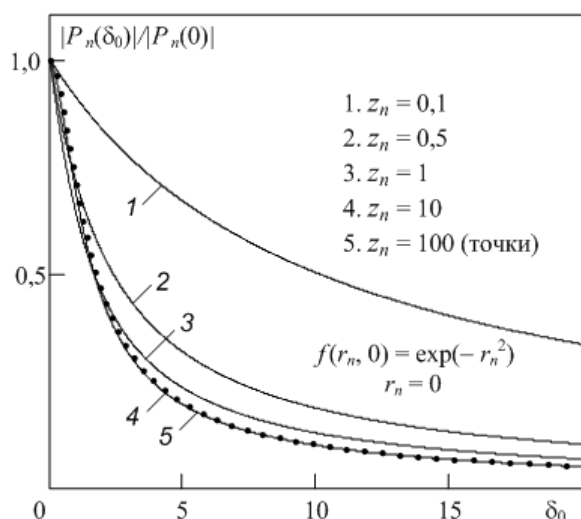


Рис. 3. Зависимость амплитуды волны от кривизны излучателя

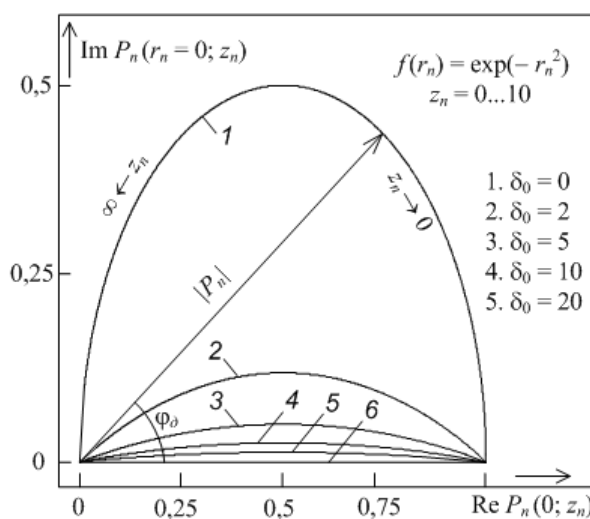


Рис. 4. Годографы осевого распределения комплексной амплитуды волны

Наглядное представление о влиянии соотношения характерных масштабов дифракции (l_δ) и геометрической расходимости (R_0) на процесс распространения волны можно получить из годографов осевого распределения комплексной амплитуды, построенных для различных значений δ_0 , рис. 4. Независимо от кривизны излучателя для пучков с гауссовым амплитудным распределением они располагаются в первом

квадранте комплексной плоскости. Все годографы начинаются ($z_n = 0$) в точке (1; 0), соответствующей граничному условию, и заканчиваются ($z_n = \infty$) в точке (0; 0), где амплитуда волны в результате сферического расхождения волны становится бесконечно малой. Указателями $z_n \rightarrow 0$ и $z_n \rightarrow \infty$ отмечены направления перемещения точки наблюдения: к излучателю или от него в бесконечность. На примере представленных зависимостей видно, что с ростом δ_0 кривые постепенно стягиваются к действительной оси, оставаясь зафиксированными своими концами в точках (0; 0) и (1; 0). В предельном случае $\delta_0 \rightarrow \infty$ годограф вырождается в отрезок прямой между этими точками (линия б).

Для сферически выпуклого излучателя предельный случай реализуется при $a = R_0$, когда центральный угол сегмента равен 180° . В этом случае из (6) следует

$$P_n(r_n = 0, z_n) = 1/(1 + \delta_0 z_n - i z_n) = 1/[1 + A z_n (1 - i/A)]. \quad (13)$$

где $A = ka/2 = kR_0/2 = \delta_0$. При условии $\delta_0 \gg 1$ или $ka \gg 1$ из (13) получаем выражение

$$P_n(r_n = 0, z_n) \cong 1/(1 + \delta_0 z_n) = 1/(1 + A z_n), \quad (14)$$

которое совпадает с радиальным распределением комплексной амплитуды давления в поле пульсирующего шара большого волнового размера ($kR_0 \gg 1$) [17]. Переход от комплексной функции (13) к вещественной зависимости (14) объясняет трансформацию годографа из фигуры на плоскости в отрезок прямой, лежащий на действительной оси. Наблюдаемое с ростом δ_0 уменьшение и последующее обращение в ноль мнимой части комплексной амплитуды отражает постепенное ослабление и в пределе ($\delta_0 \rightarrow \infty$) исчезновение дифракционных процессов. Примером, где дифракционные процессы отсутствуют, служит распространение сферической волны от пульсирующего шара размером $kR_0 \gg 1$, фаза которой определяется только пространственно-временным набегом ($\omega t - kz$), в результате чего амплитуда на всех расстояниях остается действительной (линия б). Следовательно, наличие геометрической расходимости в пучке приводит к ослаблению дифракции волны с ограниченным фронтом.

2. НАПРАВЛЕННОСТЬ ВЫПУКЛОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Угловое распределение амплитуды

$$P_n(\theta, z_n, \delta_0)/P_n(0, z_n, \delta_0) = \exp\left[-(ka/2)^2 \operatorname{tg}^2 \theta / ((\delta_0 + 1/z_n)^2 + 1)\right] \quad (15)$$

следует из (10), если перейти от линейной координаты r_n к угловому аргументу θ :

$$\theta = \operatorname{arctg}(r/z) = \operatorname{arctg}(2r_n/z_n ka).$$

Амплитудную характеристику направленности (ХН) $D(\theta)$ получаем из (15) взятием предела при $z_n \rightarrow \infty$:

$$D(\theta) = \exp\left[-(ka/2)^2 \operatorname{tg}^2 \theta / (\delta_0^2 + 1)\right] \approx \exp\left[-(ka\theta/2)^2 / (\delta_0^2 + 1)\right]. \quad (16)$$

Приближенное равенство относится к узким пучкам, где $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$. Для плоского излучателя ($\delta_0 = 0$) выражение для $D(\theta)$, записанное в виде (16), ранее было получено в [18]. По мере удаления от излучателя угловое распределение амплитуды претерпевает незначительное сужение, стабилизируясь на расстояниях $z_n \geq 10$ (16). Это связано с переходом из области дифракции Френеля в область дифракции Фраунгофера и проявляется как в сферически расходящихся пучках, так и в пучке плоского излучателя.

В рамках рассмотрения ХН сферически выпуклого излучателя интерес представляет взаимосвязь между ее шириной и углом раскрытия фазового фронта волны θ_0 , который представим как часть сферической поверхности радиусом R_0 :

$$\theta_0 = \arcsin(a/R_0) = \arcsin(2\delta_0/ka). \quad (17)$$

Оценивая ширину ХН по уровню e^{-1} величиной угла $2\theta_1$, после подстановки значения δ_0 из (17) в формулу (16) получаем соотношение

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \sqrt{(2/ka)^2 + \sin^2 \theta_0} = 2\sqrt{1 + \delta_0^2}/ka, \quad (18)$$

связывающее между собой геометрические (θ_0 или δ_0) и дифракционный (θ_1) угловые параметры пучка. При $ka \gg 1$ угловая ширина пучка практически совпадает с углом раскрытия фазового фронта волны ($\theta_1 \cong \theta_0$), что соответствует приближению геометрической акустики. С увеличением θ_0 для выполнения указанного равенства требования к величине ka становятся менее жесткими, рис. 5.

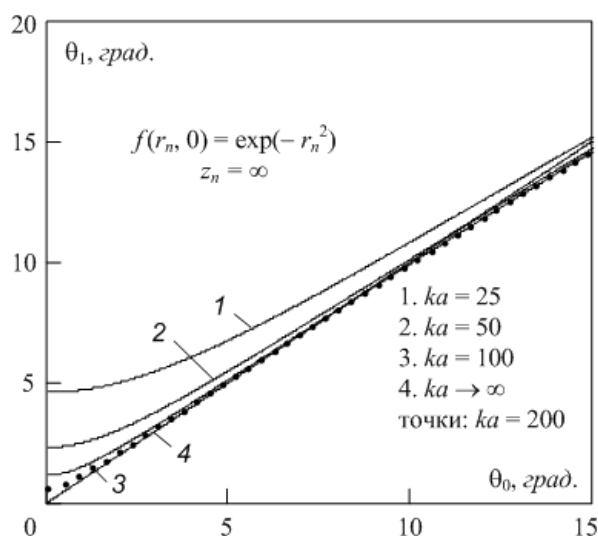


Рис. 5. Зависимость ширины ХН сферически выпуклого излучателя от начального угла раскрытия фазового фронта

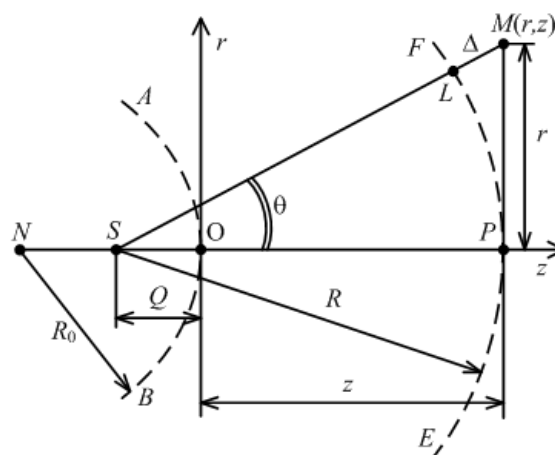


Рис. 6. Геометрия задачи о нахождении фазового центра излучателя

При нахождении фазовой ХН встает вопрос о существовании фазового центра у рассматриваемого излучателя. При этом под фазовым центром принято понимать [19] точку, выбрав которую в качестве центра сферы большого диаметра, можно получить совпадение поверхности сферы с фазовым фронтом волны, на котором колебания всех точек синфазны или противофазны. Иначе говоря, характеристика направленности, являющаяся в общем случае комплексной функцией, при выборе начала координат в точке фазового центра становится вещественной функцией, в том числе и знакопеременной. Сам факт наличия фазового центра указывает на то, что фронт волны в области нахождения ХН является сферическим.

Учитывая осевую симметрию рассматриваемых пучков, при нахождении фазовой ХН положим, что фазовый центр излучателя S находится на его оси NP и в общем случае не совпадает с поверхностью излучения, средняя точка которой совмещена с началом координат O , рис. 6. В точке N расположен центр сферической поверхности радиуса R_0 , совпадающей с исходным ($z = 0$) фазовым фронтом AB . Примем для примера, что фазовый центр S находится между геометрическим центром N и точкой O на расстоянии Q от нее, точка наблюдения M имеет координаты (r, z) .

На фиксированном расстоянии z выражение (11) описывает распределение дифракционного набега фазы в поперечном сечении пучка. Для перехода к угловой зависимости относительно фазового центра S учтем его удаленность относительно начала координат O на величину Q и разность хода луча ($LM = \Delta$) между сферическим фронтом волны FE и плоскостью поперечного сечения MP :

$$\Delta = \sqrt{(Q+z)^2 + r^2} - (Q+z) \cong r^2/2(Q+z). \quad (19)$$

Приближенное равенство (19), справедливое при $r/(Q+z) \ll 1$, является точным для решаемой задачи, поскольку в используемой записи граничного условия (5) сферический фронт также был заменен параболическим. Набег фазы, соответствующий разности хода Δ , равен

$$k\Delta \cong r_n^2/(Q_n + z_n),$$

где $Q_n = Q/l_\theta = 2Q/ka^2$. Угловую зависимость дифракционного набега фазы удобно записать как разность осевого и текущего значений фазы:

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(\theta, z_n, \delta_0) &= [\varphi_\theta(r_n = 0, z_n, \delta_0) - \varphi_\theta(r_n, z_n, \delta_0)] - k\Delta = \\ &= r_n^2 \frac{z_n + \delta_0(1 + \delta_0 z_n)}{(1 + \delta_0 z_n)^2 + z_n^2} - \frac{r_n^2}{Q_n + z_n} = \left(\frac{ka}{2} \tan \theta \right)^2 (Q_n + z_n) \frac{Q_n [z_n + \delta_0(1 + \delta_0 z_n)] - 1 - \delta_0 z_n}{(1 + \delta_0 z_n)^2 + z_n^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно определению фазового центра величина φ_θ не должна зависеть от угла наблюдения θ , т.е. $\varphi_\theta(\theta) = \text{const}$, что реализуется при $\varphi_\theta(\theta) = 0$. С учетом этого условия из выражения (20) следуют формулы для безразмерной координаты фазового центра:

$$Q(z_n, \delta_0)/R_0 = \delta_0(1 + \delta_0 z_n)/[z_n + \delta_0(1 + \delta_0 z_n)]; \quad (21)$$

$$Q_n(z_n, \delta_0) = (1 + \delta_0 z_n)/[z_n + \delta_0(1 + \delta_0 z_n)]. \quad (22)$$

Согласно (21) положение фазового центра сферически выпуклого излучателя ($\delta_0 \neq 0$) зависит от расстояния до точки наблюдения M и не совпадает с началом координат (точка O), расположенным в геометрическом центре излучающей поверхности, рис. 7. Следующее из (21) и (22) равенство $Q = R_0$ для $z_n = 0$ удовлетворяет граничному условию (4) в виде сферически расходящейся волны с начальным радиусом R_0 и центром в точке N . На рис. 8 показаны зависимости нормированной координаты фазового центра от величины δ_0 для различных расстояний до точки наблюдения.

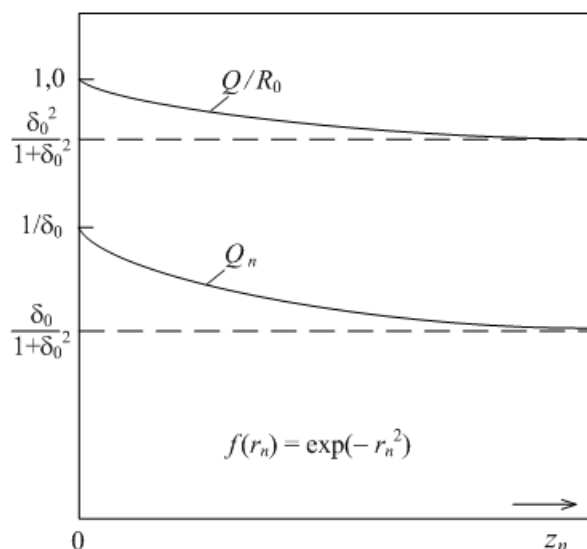


Рис. 7. Зависимость координаты фазового центра от кривизны излучателя

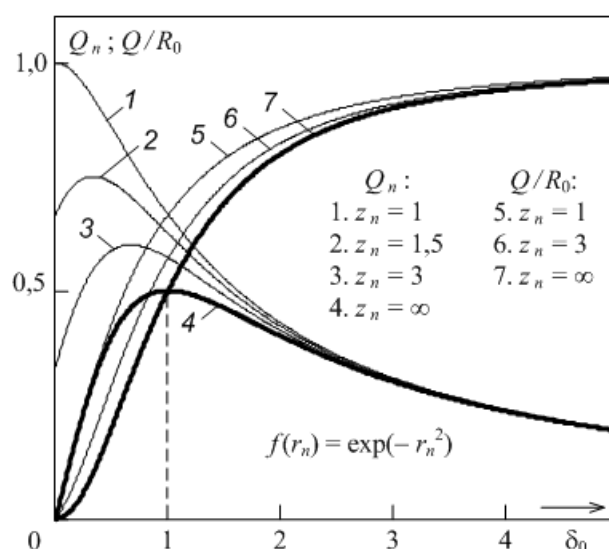


Рис. 8. Зависимость координаты фазового центра от координаты точки наблюдения

Покажем, что для конечных значений δ_0 точки N и O на рис. 6 не являются фазовым центром сферически расходящегося пучка. Для этого подставим в (20) соответственно $Q_n = 1/\delta_0$ и $Q_n = 0$:

$$Q_n = 1/\delta_0: \quad \varphi_\partial(\theta, z_n, \delta_0) = \left(\frac{ka}{2\delta_0} \operatorname{tg} \theta \right)^2 \frac{1/z_n + \delta_0}{(1/z_n + \delta_0)^2 + 1} \sim \theta^2;$$

$$Q_n = 0: \quad \varphi_\partial(\theta, z_n, \delta_0) = - \left(\frac{ka}{2} \operatorname{tg} \theta \right)^2 \frac{1/z_n + \delta_0}{(1/z_n + \delta_0)^2 + 1} \sim (-\theta^2).$$

Полученные зависимости, имеющие форму параболических функций угла $\varphi_\partial(\theta) \sim (\pm \theta^2)$, сохраняют противоположные знаки при любых $z_n \neq 0$. Это указывает на то, что местоположение фазового центра, относительно которого выполняется условие $\varphi_\partial(\theta) = 0$, находится между точками N и O . Для случая $z_n \rightarrow \infty$ выражения (20) – (22) принимают вид

$$\varphi_\partial(\theta, \delta_0) = (ka \operatorname{tg} \theta / 2)^2 [Q_n(1 + \delta_0^2) - \delta_0] / (1 + \delta_0^2);$$

$$Q_n(\delta_0) = \delta_0 / (1 + \delta_0^2); \tag{23}$$

$$Q(\delta_0) / R_0 = \delta_0^2 / (1 + \delta_0^2). \tag{24}$$

На рис. 8 кривыми 4 и 7 показаны соответствующие (23) и (24) зависимости нормированной координаты фазового центра от начальной кривизны δ_0 . Очевидно, что для плоского ($\delta_0 = 0$) излучателя фазовый центр располагается в начале координат $r=0, z=0$, поскольку $Q_n = 0$.

Если излучаемая плоским источником волна по мере распространения трансформируется из квазиплоской в сферически расходящуюся, то в сферически расходящихся гауссовых пучках фронт сохраняет свою сферическую форму на всех расстояниях. При этом следует заметить, что радиус фронта R здесь не связан линейной зависимостью с расстоянием z , отсчитываемым от начала координат:

$$R_n(z_n, \delta_0) = R(z_n, \delta_0)/l_\partial = (Q + z)/l_\partial = [z_n^2 + (1 + \delta_0 z_n)^2] / [z_n + \delta_0(1 + \delta_0 z_n)].$$

Только на больших удалениях от излучателя ($\delta_0 z_n \gg 1$) справедливо равенство $R_n \cong z_n$.

3. ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКИ РАСХОДЯЩИХСЯ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ

Для узкополосного сигнала ($\omega_0 \gg \Omega$), спектр которого сосредоточен в окрестности частоты $\omega = \omega_0$, локальное поведение закона дисперсии записывается в виде ряда [1]:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (dk/d\omega)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + 0,5(d^2k/d\omega^2)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (25)$$

где $k(\omega_0) = \omega_0/c_\phi$; c_ϕ — фазовая скорость волны с частотой ω_0 ; $(dk/d\omega)_{\omega_0}^{-1} = c_g$ — групповая скорость волнового пакета с шириной спектра $\Delta\omega \sim \Omega$; $(d^2k/d\omega^2)_{\omega_0} = (dc_g^{-1}/d\omega)_{\omega_0} = D$ — дисперсионный параметр, характеризующий частотную зависимость групповой скорости. Первыми двумя членами (25), соответствующими линейному приближению функции $k(\omega)$, описывается неискаженное распространение волнового пакета с групповой скоростью c_g . Дисперсионные искажения в виде изменений формы огибающей и фазовой модуляции высокочастотного заполнения учитываются квадратичным и последующими членами. При рассмотрении узкополосных сигналов ($\omega_0 \gg \Omega$) достаточно воспользоваться вторым приближением теории дисперсии, т.е. третьим слагаемым.

Значение дисперсионного параметра D может быть найдено путем регистрации нарушений фазового синхронизма между Фурье-компонентами многочастотной волны. Наиболее просто это реализуется при использовании трехчастотной волны с симметричным спектром ($\omega_0, \omega_{H,B} = \omega_0 \mp \Omega$) в модуляционном методе измерения дисперсии [10]:

$$\begin{aligned} p(t, r, z) &= P_0(r, z) \cos[\omega_0 t - k_0 z + \varphi_0(r, z) + \varphi_0] + \\ &+ P_H(r, z) \cos[\omega_H t - k_H z + \varphi_H(r, z) + \varphi_{H0}] + P_B(r, z) \cos[\omega_B t - k_B z + \varphi_B(r, z) + \varphi_{B0}] = \\ &= P(t, r, z) \cos[\omega_0 t - k_0 z + \varphi(t, r, z) + \varphi_0], \end{aligned} \quad (26)$$

где $P_0(r, z)$, $P_H(r, z)$, $P_B(r, z)$ и $\varphi_0(r, z)$, $\varphi_H(r, z)$, $\varphi_B(r, z)$ — пространственные изменения амплитуд и фаз гармоник; φ_0 , φ_{H0} , φ_{B0} — начальные ($z = 0$) фазы компонент. Тогда

$$D(\omega_0, r, z) = d^2 k(\omega_0, r, z) / d\omega^2 = -2[\beta(r, z) - \beta_0] / z\Omega^2 = -2\Delta\beta(r, z) / z\Omega^2, \quad (27)$$

где $\beta_0 = [(\varphi_{H0} + \varphi_{B0})/2 - \varphi_0]$ — начальное ($z = 0$) значение фазового инварианта (ФИ) трехчастотного сигнала; $\beta(r, z) = [(\varphi_H(r, z) + \varphi_B(r, z))/2 - \varphi_0(r, z)]$ — величина ФИ в произвольной точке наблюдения с координатами (r, z) . Для нахождения пространственного распределения дисперсионного параметра достаточно определить дифракционный набег фазового инварианта $\Delta\beta(r, z)$ трехчастотной волны. Дисперсионные искажения отсутствуют ($D = 0$) при сохранении фазового синхронизма в процессе распространения гармоник с частотами ω_H , ω_0 и ω_B , т.е. при $\Delta\beta(r, z) = 0$. В бездисперсионных средах эта ситуация возможна только у одномерных волн.

Согласно (11) дифракционный набег фазового инварианта равен

$$\Delta\beta(r_n, z_n) = 0,5[\arctg(x_n \Phi / (\Phi - 1)) + \arctg(x_n \Phi / (\Phi + 1))] - \arctg(x_n) + \frac{y_n^2 x_n}{1 + x_n^2} \cdot \frac{[1 + \Phi^2(3x_n^2 - 1)](1 - \delta_0 x_n)}{[\Phi^2(1 + x_n^2) + 1]^2 - 4\Phi^2}, \quad (28)$$

где

$$x_n = z_n / (1 + \delta_0 z_n); \quad y_n^2 = r_n^2 / (1 + \delta_0 z_n).$$

В выражении (28) и далее для нормировки продольной координаты ($z_n = z/l_\delta$) используется $l_{\delta 0} = \omega_0 a^2 / 2c_0$. Частотный параметр $\Phi = \omega_0 / \Omega$ определяет полосу частот, занимаемую сигналом. При увеличении Φ полоса частот сужается, приводя к уменьшению дифракционных различий между Фурье-компонентами с частотами ω_H , ω_0 и ω_B . Очевидно, что эти различия полностью исчезают при $\Phi \rightarrow \infty$.

Осевые распределения дисперсионной расстройки ФИ $\Delta\beta(r_n = 0, z_n)$ при различных значениях кривизны излучателя согласно (28) приведены на рис. 9. Следует отметить, что поведение кривых практически не зависит от величины частотного параметра при условии его изменения в области $\Phi \geq 5$. Отличаются лишь абсолютные значения $\Delta\beta$.

При условии $\delta_0 = \text{const}$ и $\Phi_1 \neq \Phi_2$ справедливо соотношение

$$\Delta\beta(r_n = 0, z_n, \Phi_1) \cong (\Phi_2 / \Phi_1)^2 \Delta\beta(r_n = 0, z_n, \Phi_2).$$

В качестве примера точками и сплошными линиями показаны кривые, соответствующие $\Phi_1 = 5$ и $\Phi_2 = 100$. Поскольку нахождение дисперсионного параметра в (25) и (27) предполагает использование узкополосного измерительного сигнала ($\Phi \gg 1$), поэтому рассмотрение значений $\Phi < 5$ интереса не представляет.

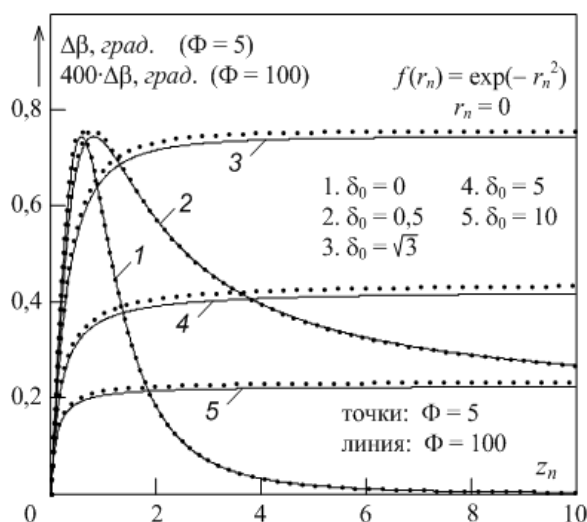


Рис. 9. Осевые распределения расстройки фазового инварианта при различной кривизне излучателя

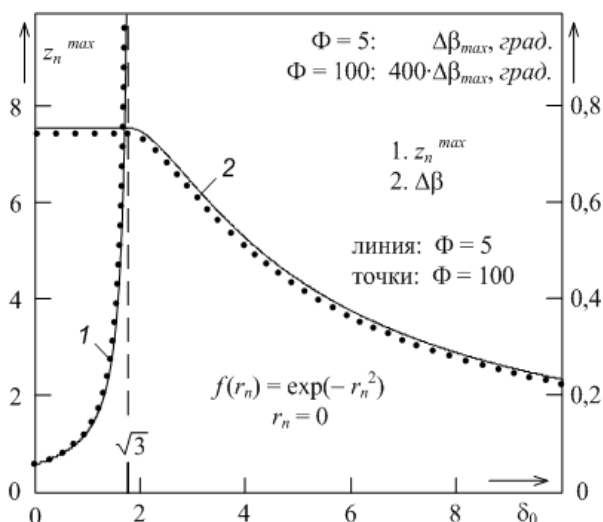


Рис. 10. Влияние кривизны излучателя на величины z_n^{\max} и $\Delta\beta_{\max}$

Поведение функции $\Delta\beta(r_n = 0, z_n)$ качественно различно при изменении кривизны излучателя в интервалах $0 \leq \delta_0 < \sqrt{3}$ и $\delta_0 > \sqrt{3}$. В первом случае кривые имеют явно выраженный максимум на расстоянии

$$z_n^{\max} = \left[\sqrt{3/(1 - 1/\Phi^2)} - \delta_0 \right]^{-1}, \quad (29)$$

величина которого устремляется в бесконечность при $\delta_0 \geq \sqrt{3}$, рис. 10. Для плоского излучателя при $\Phi \gg 1$ имеем $z_n^{\max} \cong 1/\sqrt{3}$. Зависимость максимальной величины дисперсионной расстройки фазового инварианта $\Delta\beta_{\max}$ от кривизны при $0 \leq \delta_0 < \sqrt{3}$ с учетом (29) имеет вид

$$\Delta\beta_{\max} = \frac{1}{2} \left\{ \arctg \left[\frac{\Phi z_n^{\max}}{(1 + \delta_0 z_n^{\max})(\Phi - 1)} \right] + \arctg \left[\frac{\Phi z_n^{\max}}{(1 + \delta_0 z_n^{\max})(\Phi + 1)} \right] \right\} - \arctg \left(\frac{z_n^{\max}}{1 + \delta_0 z_n^{\max}} \right). \quad (30)$$

При $\delta_0 > \sqrt{3}$, когда $z_n^{\max} = \infty$, соответственно имеем

$$\Delta\beta_{\max} = 0,5 \{ \arctg[\Phi/\delta_0(\Phi - 1)] + \arctg[\Phi/\delta_0(\Phi + 1)] \} - \arctg(1/\delta_0). \quad (31)$$

Зависимости $\Delta\beta_{\max}(\delta_0)$ для $\Phi_1 = 5$ и $\Phi_2 = 100$ показаны на рис. 10. В области $0 \leq \delta_0 < \sqrt{3}$ величина $\Delta\beta_{\max}$ практически неизменна и равна

$$\Delta\beta_{\max 0}(\delta_0 = 0) = \frac{1}{2} \left\{ \arctg \sqrt{\frac{\Phi + 1}{3(\Phi - 1)}} + \arctg \sqrt{\frac{\Phi - 1}{3(\Phi + 1)}} \right\} - \arctg \left(\Phi \sqrt{\frac{3}{\Phi^2 - 1}} \right), \quad (32)$$

а при $\delta_0 > \sqrt{3}$ монотонно уменьшается, стремясь к нулю.

Приведенные зависимости $\Delta\beta(r_n, z_n)$ отражают присущую дисперсии асинхронность распространения волн разных частот, сопровождающуюся нарушением фазовых соотношений в многочастотном сигнале. Отличительной особенностью сферически расходящегося пучка при сравнении с полем плоского излучателя является сохранение

фазовых искажений после завершения дифракционных процессов. Кривая 1 на рис. 9 демонстрирует, что при $\delta_0 = 0$ вызванная дифракцией расфазировка гармоник в трехчастотной волне на расстояниях $z_n > 1$ монотонно уменьшается, стремясь к нулю с ростом z_n . Вдоль оси выпуклого ($\delta_0 \neq 0$) излучателя на расстояниях $\delta_0 z_n \gg 1$ величина $\Delta\beta$, зависящая от δ_0 , сохраняет свое значение неизменным, рис. 9 и рис. 11. Остающиеся в волне фазовые искажения характеризуются величиной:

$$\Delta\beta(r_n = 0) \cong 0,5 \{ \arctg[\Phi/\delta_0(\Phi - 1)] + \arctg[\Phi/\delta_0(\Phi + 1)] \} - \arctg(1/\delta_0). \quad (33)$$

Наличие экстремума в $\Delta\beta(\delta_0)$ приводит к тому, что одному значению $\Delta\beta$ соответствует две разных величины кривизны, находящиеся соответственно в интервалах $0 < \delta_0 < \sqrt{3}$ и $\delta_0 > \sqrt{3}$, рис. 11-б. Согласно приведенным результатам уровень фазовых искажений, вносимых дифракцией и сферической расходимостью волны, в гауссовом пучке сравнительно невелик и не способен существенно повлиять на передачу информации с помощью модулированных волн [2].

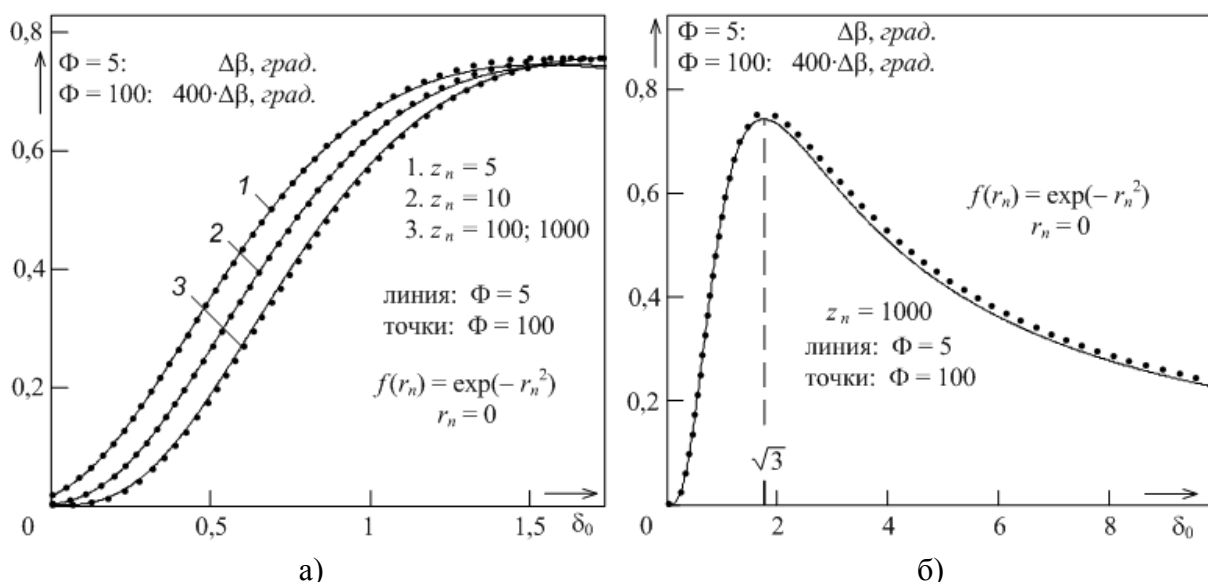


Рис. 11. Зависимость дисперсионной расстройки фазового инварианта от кривизны излучателя на больших расстояниях

Наблюдаемые на осевых распределениях $\Delta\beta(r_n = 0, z_n)$ качественные отличия между расходящимися пучками с $0 \leq \delta_0 < \sqrt{3}$ и $\delta_0 > \sqrt{3}$ проявляются и на поперечных распределениях ФИ. В качестве примера на рис. 12 приведены зависимости $\Delta\beta(r_n)$ для кривизны $\delta_0 = 0,5$ и $\delta_0 = 5$ на разных расстояниях z_n . В плоскости $z_n = 0$ фазовые искажения в спектре трехчастотной волны отсутствуют (линия 1) при любых значениях δ_0 , поскольку волна еще не испытала влияние дифракции. Начальный этап распространения ($z_n = 0,01; 0,1; 0,4; 0,7$) сопровождается качественно одинаковым проявлением фазовых искажений (кривые 2 и 3). Общность происходящих процессов

видна на примере происходящей трансформации начального распределения $\Delta\beta(r_n) = 0$ в выпуклую функцию.

По мере приближения волны к расстоянию

$$z_{nC} = \sqrt{\Phi^2 - 1} / (\sqrt{3}\Phi - \delta_0 \sqrt{\Phi^2 - 1}) \quad (34)$$

дальнейшие изменения функции $\Delta\beta(r_n)$ при $0 \leq \delta_0 < \sqrt{3}$ и $\delta_0 > \sqrt{3}$ становятся существенно различающимися. В первом случае проход координаты $z_n = z_{nC}$ сопряжен с изменением формы кривой $\Delta\beta(r_n)$, где функция преобразуется из выпуклой (кривая 3) в вогнутую (кривая 5), рис. 12-а. На примере кривой 4 видно, что при $z_n = z_{nC}$ фазовые искажения трехчастотной волны равномерно распределены в сечении пучка, $\Delta\beta(r_n) = \text{const}$. При $\Phi \gg 1$ эта координата равна:

$$z_{nC} \cong 1/(\sqrt{3} - \delta_0). \quad (35)$$

Соответственно для плоского излучателя $z_{nC} = 1/\sqrt{3}$, что было показано в [14].

Согласно (35) при $\delta_0 \rightarrow \sqrt{3}$ «выравнивание» искажений в сечении пучка наступает на удалении $z_{nC} = \infty$. Дальнейшее увеличение расстояния ($z_n > z_{nC}$) сопровождается вначале ростом собственной кривизны функции $\Delta\beta(r_n)$ в приосевой области пучка, который сменяется в последующем ее “распрямлением” на уровне, определяемом согласно (33). Все отмеченные этапы изменения $\Delta\beta(r_n)$ свойственны полю плоского излучателя с той лишь разницей, что при $z_n \rightarrow \infty$ кривая 7 стремится к нулевому уровню [14]. Столь сложная пространственная динамика фазовых искажений обусловлена доминированием дифракционных процессов над влиянием геометрической расходимости.

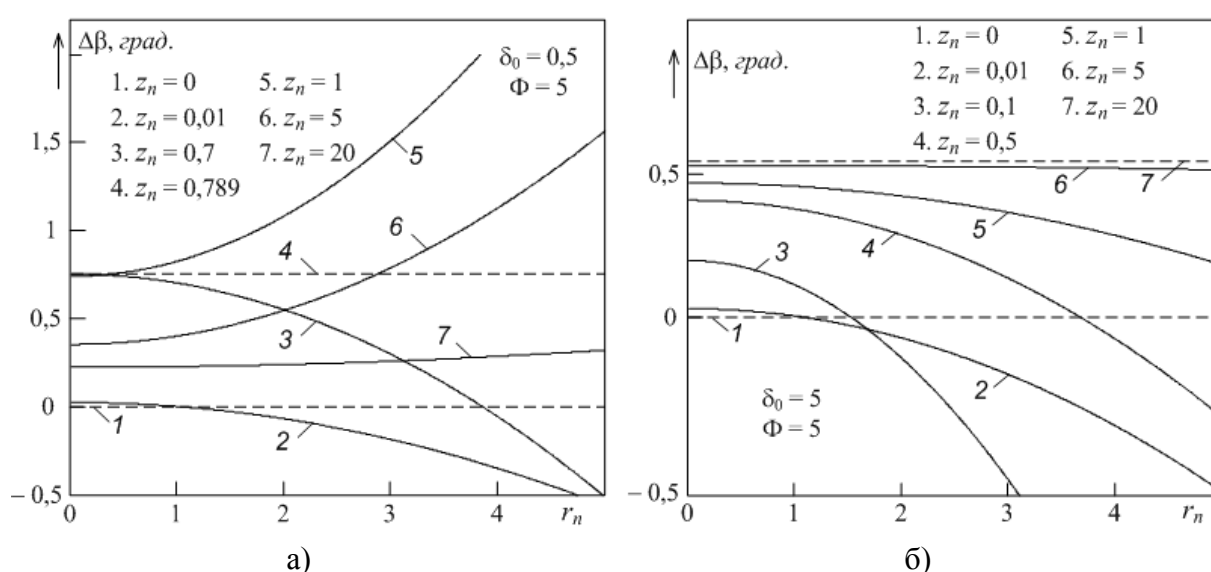


Рис. 12. Поперечные распределения расстройки фазового инварианта при различной кривизне излучателя

При $\delta_0 > \sqrt{3}$ напротив, влияние дифракции ослабевает, а основной вклад вносит геометрическая расхожимость. Поэтому трансформация поперечного распределения расстройки ФИ $\Delta\beta(r_n)$ по мере удаления от излучателя происходит без изменения знака ее кривизны, рис. 12-б. В справедливости данного вывода несложно убедиться, если перейти к приближению геометрической акустики, где распространение волны описывается на основе лучевых представлений. Для этого примем $l_\phi \rightarrow \infty$, тогда из (11) для фазы следует

$$\varphi_\phi(r, z) = kr^2/2(z + R_0). \quad (36)$$

Согласно (36) для всех значений (r, z) справедливо равенство $\Delta\beta = 0$, т.е. в отсутствие дифракции фазовые искажения в сферически расходящемся пучке трехчастотной волны не наблюдаются. Следовательно, ослабление дифракции с ростом безразмерной кривизны излучателя δ_0 обусловлено увеличением l_ϕ при условии $R_0 = \text{const}$. Для гауссового амплитудного распределения ситуация с $\delta_0 = \sqrt{3}$ может рассматриваться, как условие своеобразного баланса двух процессов с точки зрения их влияния на дисперсионные свойства пучка, рис. 11-б. Соответственно изменяется и пространственная динамика расстройки фазового инварианта, рис. 12. Учитывая, что каждому значению ФИ соответствует свой закон амплитудной $P(t)$ и фазовой $\varphi(t)$ модуляции трехчастотной волны [2], несложно из $\Delta\beta(r_n, z_n)$ рассчитать пространственное изменение вида модуляции под влиянием геометрической дисперсии.

Выражение для дисперсионного параметра сферически расходящегося гауссового пучка на частоте ω_0 получаем подстановкой (28) в (27) с последующим взятием предела при условии $\Phi \rightarrow \infty$:

$$D_n(r_n, z_n, \delta_0) = \omega_0^2 l_{\phi 0} D(r_n, z_n, \delta_0) = \\ = - \frac{2(1 + \delta_0 z_n)^3}{[(1 + \delta_0 z_n)^2 + z_n^2]^2} \left\{ 1 + \frac{r_n^2}{(1 + \delta_0 z_n)^2} \left[\frac{4z_n^2}{(1 + \delta_0 z_n)^2 + z_n^2} - 1 \right] \right\}, \quad (pad). \quad (37)$$

В случае $\delta_0 = 0$ из (37) следует известное решение для дисперсионного параметра плоского гауссового излучателя [14]. Осевые зависимости $D_n(r_n = 0, z_n)$ для различных величин δ_0 приведены на рис. 13. На малых расстояниях ($z_n < 0,5$) наибольшие абсолютные значения имеет дисперсионный параметр плоского излучателя. С ростом δ_0 его величина вблизи излучателя уменьшается. За пределами области дифракции ($z_n > 1,5$) наибольшие значения D_n имеет пучок с кривизной излучателя $\delta_0 = \sqrt{3}$, кривая 3. Напротив, для плоского излучателя функция $D_n(z_n)$ имеет здесь наименьшие значения. Таким образом, в приосевой области ближней зоны пучка геометрическая расхожимость ослабляет дисперсионные свойства, тогда как в дальней области она

способствует их “сохранению”. Наиболее эффективно это достигается при $\delta_0 = \sqrt{3}$. Тем не менее, независимо от величины δ_0 с ростом расстояния дисперсионный параметр монотонно убывает, стремясь к нулю при $z_n \rightarrow \infty$.

На рис. 14 показаны зависимости дисперсионного параметра, приведенного к единичному расстоянию, от кривизны излучателя. Видно, что изменением δ_0 можно управлять интенсивностью дисперсионных процессов в приосевой области пучка. На расстояниях $z_n \leq 0,5$ наибольшее значение дисперсионного параметра достигается при $\delta_0 = 0$. Для расстояний $z_n > 0,5$ максимальное значение D_n обеспечивается увеличением кривизны излучателя, величина которой достигает $\delta_0 = \sqrt{3}$ на удалении $z_n = \infty$.

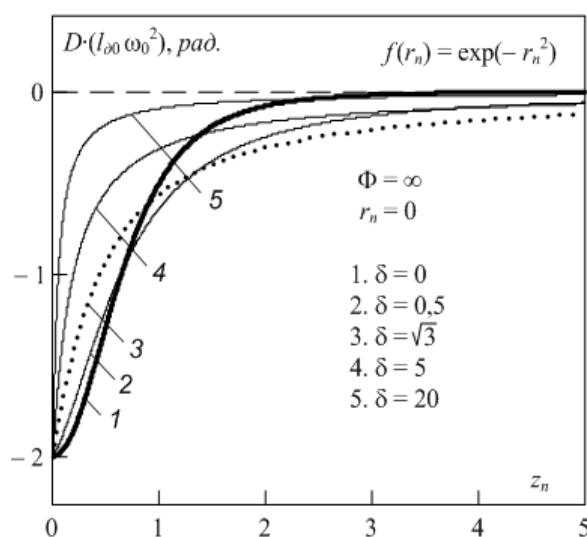


Рис. 13. Осевые распределения дисперсионного параметра при различной кривизне излучателя

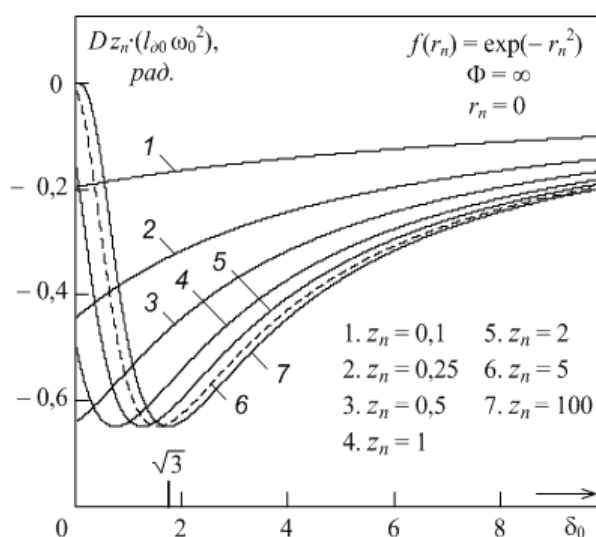


Рис. 14. Зависимости дисперсионного параметра, приведенного к единичному расстоянию, от кривизны излучателя

Подобно пространственной динамике зависимости $\Delta\beta(r_n)$ характер изменений поперечного распределения дисперсионного параметра с удалением от излучателя существенно зависит от величины δ_0 . Качественные различия в поведении $D_n(r_n)$ с ростом z_n здесь также соответствуют двум областям значений кривизны излучателя: $0 \leq \delta_0 < \sqrt{3}$ и $\delta_0 \geq \sqrt{3}$. В качестве примера на рис. 15 приведены зависимости $D_n(r_n)$ для $\delta_0 = 0,5$ и $\delta_0 = 5$ на разных расстояниях z_n .

Несмотря на отмеченную общность, пространственным изменениям $\Delta\beta(r_n)$ и $D_n(r_n)$ присущи и существенные различия. Уже в самом начале ($z_n = 0$), где $\Delta\beta(r_n) = 0$, дисперсионный параметр имеет конечное значение и распределен по закону

$$D(r_n, z_n = 0) = -2(1 - r_n^2) / \omega_0^2 l_{\delta 0}, \quad (\text{рад}), \quad (38)$$

который определяется величиной l_ϕ и не зависит от кривизны излучателя. Дифракционный механизм геометрической дисперсии подчеркивается тем фактом, что при переходе в (38) к приближению геометрической акустики ($l_\phi \rightarrow \infty$) дисперсионный параметр изначально равен нулю и остается таким на всем пути распространения волны. При $0 \leq \delta_0 < \sqrt{3}$ функция $D_n(r_n)$ по мере увеличения z_n постепенно трансформируется из вогнутой кривой согласно (38) в выпуклую, принимая на расстоянии $z_{nc} = 1/(\sqrt{3} - \delta_0)$ вид горизонтальной прямой, проходящей на уровне

$$D_n(z_n, \delta_0) = -3\sqrt{3}(\sqrt{3} - \delta_0)/8, \quad (\text{рад}).$$

Достигнув на расстоянии $z_n > z_{nc}$ наибольшей кривизны, выпуклая зависимость $D_n(r_n)$ начинает “распрямляться” и при $z_n \rightarrow \infty$ стремится к нулевому уровню. В основе наблюдаемых изменений формы кривой $D_n(r_n)$ лежит постепенное по мере роста z_n прекращение дифракционных процессов. Сравнивая зависимости на рис. 15-а с аналогичными результатами для плоского излучателя [14], можно видеть ослабление динамики дисперсионного параметра из-за влияния геометрической расходимости. Для значений $\delta_0 \geq \sqrt{3}$ влияние расходимости столь велико, что характерная для дифрагирующего пучка “инверсия” формы у функции $D_n(r_n)$ не происходит, рис. 15-б. Поперечное распределение дисперсионного параметра на всех расстояниях z_n имеет вид вогнутой кривой, изменяется лишь ее кривизна.

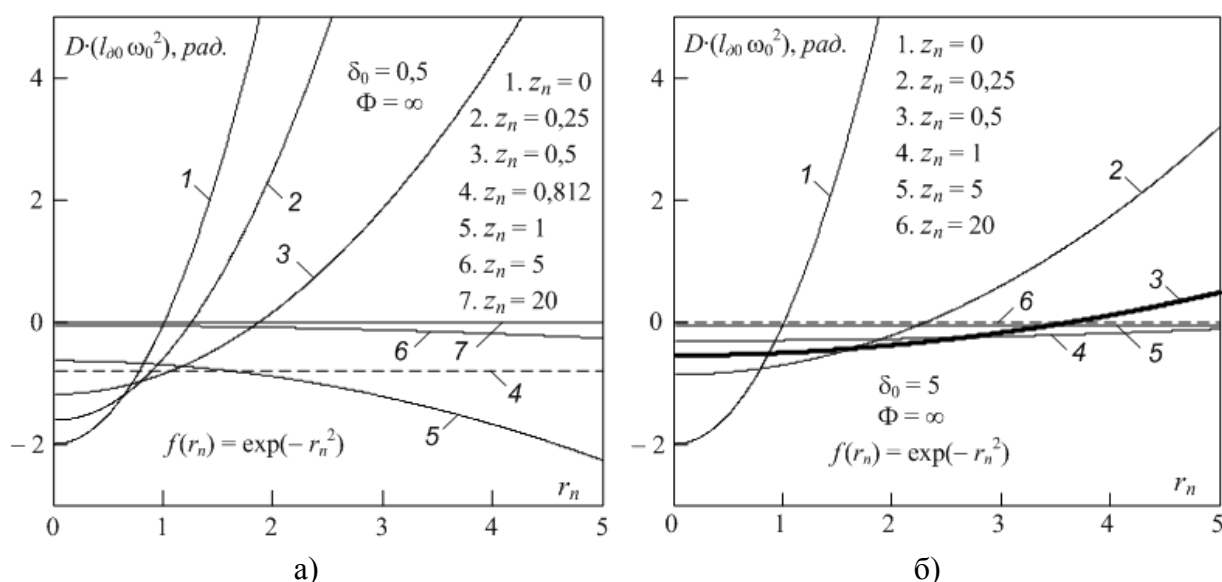


Рис. 15. Поперечные распределения дисперсионного параметра для $\delta_0 = 0,5$ и $\delta_0 = 5$

Сопоставляя пространственные распределения D_n и $\Delta\beta$, несложно проследить запаздывающее с расстоянием появление фазовых искажений в модулированной волне относительно изменения дисперсионных условий для ее распространения. Данный процесс наглядно представлен на осевых распределениях, рис. 9 и рис. 13. На

начальном этапе, где дисперсионный параметр достаточно велик, происходит быстрое нарастание $\Delta\beta$, вызванное накапливающейся с расстоянием расфазировкой Фурье-компонент. Это продолжается до тех пор, пока убывь дисперсионного параметра не замедлит, а затем и остановит этот рост.

Дальнейшее поведение волны полностью зависит от кривизны излучателя, определяющей интенсивность дисперсионных процессов. Поскольку геометрическая расходимость выполняет роль своеобразного ограничителя дифракции, с увеличением δ_0 ускоряется пространственная убывь дисперсионного параметра в начале распространения волны. В зависимости от величины δ_0 это может ограничить рост фазовых искажений определенным уровнем еще на начальном участке дифракции пучка ($\delta_0 > \sqrt{3}$), либо это произойдет на завершающем отрезке области дифракции ($0 < \delta_0 < \sqrt{3}$). В любом из этих случаев из-за «незавершенности» дифракционных процессов происходит фиксация и последующее сохранение фазовых искажений. Только в поле плоского излучателя ($\delta_0 = 0$), где формирование сферически расходящейся волны происходит исключительно под влиянием дифракции, на расстояниях $z_n \gg 1$ имеет место $\Delta\beta = 0$.

ВЫВОДЫ

Проведенный анализ позволил проследить совместное влияние дифракции и геометрической расходимости волны на пространственные характеристики поля и дисперсионные свойства сферически расходящегося гауссового пучка. Выявлен ряд свойств, присущих полю волны, излучаемой выпуклыми излучателями. Среди них следует отметить качественно различное влияние начальной кривизны фазового фронта на поперечные распределения амплитуды и фазы гармонической волны, ограничение пространственного набега фазы, монотонный характер зависимости амплитуды от кривизны излучателя на оси гауссового пучка, наличие фазового центра и зависимость его местоположения от формы излучающей поверхности. Для слабо и сильно расходящихся пучков прослежены качественные различия пространственной динамики дисперсионного параметра и фазовых искажений узкополосной трехчастотной волны, появляющихся из-за нарушения фазового синхронизма ее спектральных компонент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука. 1990. 432 с.
2. Гаврилов А. М., Ситников Р. О. Измерение геометрической дисперсии в звуковом пучке. Акуст. журн., т. 52, № 5, 2006. С. 641–647.
3. Гаврилов А. М., Ситников Р. О. Использование фигур Лиссажу для измерения фазовых соотношений в спектре трехчастотного сигнала. Известия вузов. Сев.-Кавказский регион. Технические науки, № 3, 2006. С. 34–39.
4. Горская Н. В., Иванов А. Н., Курин В. В., Морозова Н. И., Салин Б. М. Фазовые

- соотношения при распространении тригармонической волны в маломодовых акустических волноводах. Акуст. журн., т. 31, № 6, 1985. С. 796–799.
5. Вакс В. Л., Шейнфельд И. В. Измеритель фазового инварианта. Патент РФ № 2062474, G01R 25/00. Оpubл. 20.06.1966.
 6. Чикин А. И., Шемагин В. А., Шейнфельд И. В. Способ измерения фазового инварианта тригармонического сигнала. Патент РФ № 1775680, G01R 23/16. Оpubл. 15.11.1992. Бюл. № 42.
 7. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982. 174 с.
 8. Андреев В. Г., Карабутов А. А., Руденко О. В. Экспериментальное исследование распространения нелинейных звуковых пучков в свободном пространстве. Акуст. журн., 1985, т. 31, № 4. С. 423–428.
 9. Маков Ю. Н. Волноводное распространение звуковых пучков в нелинейной среде. Акуст. журн., 2000, т. 46, № 5. С. 680–684.
 10. Зверев В. А. Модуляционный метод измерения дисперсии ультразвука. Акуст. журн., 1956, т. 2, № 2. С. 142–145.
 11. Гаврилов А. М., Ситников Р. О. Экспериментальное исследование нелинейной дисперсии трехчастотного волнового пакета методом фигур Лиссажу. Сборник трудов XVIII сессии Российского акустического общества. Т.1. – М.: ГЕОС, 2006. С. 119–123.
 12. Пономарев А. Е., Булатицкий С. И., Сапожников О. А. Компрессия и усиление ультразвукового импульса, отраженного от одномерной слоистой структуры. Акуст. журн., т. 53, № 2, 2007. С. 157–167.
 13. Гостев В. С., Есипов И. Б., Попов О. Е., Воронин В. А., Тарасов С. П. Дисперсия сигнала параметрической антенны в мелком море. Акустика неоднородных сред. Ежегодник Российского акустического общества. М.: Тривант, 2006. С. 112–120.
 14. Гаврилов А. М. Геометрическая дисперсия в звуковых пучках, создаваемых плоскими излучателями. //Акустика неоднородных сред. Ежегодник Российского акустического общества. Труды научной школы проф. С.А. Рыбака. Троицк: Тривант, 2007, вып. 8. С. 86–102.
 15. Малюжинец Г. Д. Развитие представлений о явлениях дифракции. УФН, 1959, т. 69, № 10. С. 321–334.
 16. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. М.: Наука. 1982.
 17. Лепендин Л. Ф. Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
 18. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. 264 с.
 19. Смаришев М. Д., Добровольский Ю. Ю. Гидроакустические антенны. Л.: Судостроение, 1984. 304 с.