Электронный журнал «Техническая акустика»
http://www.ejta.org

2008, 2

И. В. Андронов

Санкт-Петербургский государственный университет, НИИФ,
198504, Санкт-Петербург, Петродворец,. Ульяновская 1, e-mail: iva---@list.ru

О влиянии воздуха на дифракцию изгибных волн в тонкой упругой пластине

Получена 09.12.2007, опубликована 22.01.2008

При проведении расчетов в задачах дифракции изгибных волн на препятствиях в тонких упругих пластинках часто пренебрегают влиянием воздуха. В работе исследуется корректность такого подхода. На примере трех типов препятствий (точечной массы, короткого разреза и малого отверстия) выясняется, что погрешности приближенного подхода, в котором не учитывается обратное влияние акустической среды на пластину, могут быть достаточно велики. В случае препятствий, в которых нет отверстий, погрешности достигают приблизительно 4% и максимальны на низких частотах. Если в препятствии имеются свободные кромки, погрешности приближенного подхода увеличиваются и пренебрегать обратным влиянием акустической среды на пластину нельзя не только в низкочастотном диапазоне, но и на частотах близких и превышающих частоту совпадения. Еще более существенными оказываются погрешности в том случае, если препятствие содержит отверстия ненулевой площади.

Ключевые слова: колебания тонкой упругой пластинки, изгибные волны, дифракция, обобщенные модели, численное сравнение, дальнее поле.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое и экспериментальное исследование распространения упругих волн в пластинах и оболочках при наличии локальных неоднородностей толщины (лунок, выточек, выступов, бугорков), либо включений из другого материала и связанных с ними эффектов рассеяния упругих волн и возмущения звуковых полей в акустических средах, контактирующих с пластинами и оболочками, является актуальной задачей. Известно, что в случае пластины, погруженной в жидкость, необходимо рассматривать совместные колебания упругой пластины и жидкости, что приводит к специальному классу краевых задач, названному гранично-контактными [1]. Если же пластина находится в контакте со значительно более легкой акустической средой, как например воздух, то на первый взгляд влиянием колебаний воздуха на деформацию пластины можно пренебречь. Тогда при расчете рассеяния изгибной волны на препятствии в пластине можно сначала найти изгибные смещения, считая пластину изолированной, а затем по заданным смещениям расчитать акустическое поле в среде. Проверка правомочности такого подхода и исследование вносимых при этом ошибок и является

целью данной работы. Мы будем сравнивать результаты, полученные в рамках приближенного подхода, с «точным» решением на примере трех задач, допускающих явное решение. В разделе 1 рассматривается задача рассеяния на точечной массе, прикрепленной к пластине. Производится численное сравнение диаграмм рассеянного акустического поля. В разделе 2 аналогичное сравнение производится для задачи рассеяния на модели короткой трещины (разреза), а в разделе 3 — на модели кругового отверстия малого радиуса. При этом используются обобщенные точечные модели, построенные в [1].

1. РАССЕЯНИЕ НА ТОЧЕЧНОЙ МАССЕ

1.1. Постановка задачи

В качестве первой задачи рассмотрим хорошо известную задачу рассеяния на массе M, прикрепленной к пластине в начале координат (см. например [2–4]). В «точной» постановке задача формулируется в виде следующих уравнений. Акустическое давление U удовлетворяет уравнению Гельмгольца (временной множитель стационарных колебаний выбран в виде $e^{-i\omega t}$ и всюду опущен)

$$\Delta U(x,y,z)+k^2U(x,y,z)=0, \qquad z\neq 0. \tag{1}$$

Здесь k — волновое число в акустической среде, в которой находится пластина. Смещения пластины w связаны с акустическим давлением условием неразрывности

$$w=\frac{1}{\rho_0\omega^2}\frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z=\pm 0}. \tag{2}$$

Кроме того имеет место динамическое условие

$$D\Delta^2-\omega^2(\rho h+M\delta(x_\delta(y))w(x,y)+U(x,y,+0)-U(x,y,-0)=0. \tag{3}$$

Здесь введены следующие величины: ρ_0 и ρ — плотности акустической среды и материала пластины, D — цилиндрическая жесткость пластины, h — ее толщина.

Отметим, что функция Грина как в случае изолированной пластины, так и в случае точечного источника приложенного к погруженной пластине, конечна. Поэтому член с дельта-функцией в уравнении (3) имеет смысл.

1.2. Приближенный подход

Рассмотрим приближенный подход. Пусть по пластине бежит волна

$$w^i=e^{ik_0x}, \tag{4}$$

где $k_0=\sqrt[4]{\omega^2\rho h/D}$ — волновое число изгибных колебаний в изолированной пластине. Эта волна рассеивается на прикрепленной точечной массе и возбуждает расходящуюся по пластине волну w^s. Эту волну найдем из уравнения (3) в котором пренебрежем акустическим полем U.

С учетом того, что функцией Грина для изолированной пластины является

$$g_0 = \frac{i}{8k_0^2}(H_0^{(1)}(k_0\rho) - H_0^{(1)}(ik_0\rho)), \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \tag{5}$$

имеем явное решение

$$w^s = -\left(\frac{i}{8k_0^2} - \frac{D}{\omega^2 M}\right)^{-1} g_0.$$

Акустическое поле состоит из падающего поля

$$U^i = \frac{\rho_0\omega^2}{i\sqrt{k^2-k_0^2}} e^{ik_0x}(z) e^{i\sqrt{k^2-k_0^2}|z|},$$

представляющего собой головные или неоднородные волны (в зависимости от знака подкоренного выражения), расходящиеся от пластины, и рассеянного поля U^s. По заданным смещениям w^s пластины рассеянное поле вычисляется при помощи свертки с функцией Грина $G_N = e^{ikr}/r$ задачи Неймана, которую удобно для дальнейших вычислений записать в виде двукратного интеграла Фурье

$$G_N = \frac{(z)}{4\pi^2}\iint e^{i\lambda(x-x_0)+i\mu(y-y_0)-\sqrt{\lambda^2+\mu^2-k^2}|z|}\frac{d\lambda\, d\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2-k^2}}.$$

Аналогичным образом можно записать и функцию Грина изолированной пластины:

$$g_0 = \frac{1}{4\pi^2}\iint e^{i\lambda(x-x_0)+i\mu(y-y_0)}\frac{d\lambda\, d\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^2-k_0^4}.$$

Подставляя эти формулы в интеграл

$$U^s = \rho_0\omega^2\iint G_N w^s dx_0\, dy_0$$

и меняя порядок интегрирования, несложно получить следующее выражение для рассеянного акустического поля:

$$U^s = -\frac{\rho_0\omega^2}{4\pi^2}(z)\left(\frac{i}{8k_0^2} - \frac{D}{\omega^2 M}\right)^{-1}\iint\frac{e^{i\lambda x+i\mu y-\sqrt{\lambda^2+\mu^2-k^2}|z|}\, d\lambda\, d\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2-k^2}((\lambda^2+\mu^2)^2-k_0^4)}.$$

Асимптотика дальнего поля может быть получена методом перевала

$$U^s \sim \frac{2\pi}{kr}e^{ikr-i\pi/2}\Psi_1,$$

$$\Psi_1 = -\frac{ik\rho_0\omega^2}{4\pi^2}\left(\frac{i}{8k_0^2} - \frac{D}{\omega^2 M}\right)^{-1}\frac{1}{k^4\cos^4\vartheta - k_0^4}.$$

1.3. Точный учет акустической среды

Получим точное решение, поставленной в параграфе 1.1 задачи. Пусть падает волна

$$U^i = -\frac{\rho_0\omega^2(z)}{\sqrt{\kappa^2-k^2}}e^{i\kappa x-\sqrt{\kappa^2-k^2}|z|},$$

где κ — волновое число поверхностной волны, определяемое из дисперсионного уравнения

$$(\kappa^4 - k_0^4)\sqrt{\kappa^2 - k^2} = 2N = 2\frac{\rho_0\omega^2}{D}. \tag{6}$$

Смещение пластины в этой волне имеет вид $w^i = e^{i\kappa x}$, что соответствует падающей волне (4) из приближенного подхода.

Рассеянное поле U^s отличается от функции Грина G лишь множителем

$$U^s = cG,$$

$$G = \frac{1}{4\pi^2}(z)\iint e^{i\lambda x + i\mu y - \sqrt{\lambda^2+\mu^2-k}\,|z|}\frac{d\lambda\, d\mu}{L(\sqrt{\lambda^2+\mu^2})}, \tag{7}$$

где

$$L(\tau) = (\tau^4 - k_0^4)\sqrt{\tau^2 - k^2} - 2N.$$

Коэффициент c легко найти, если подставить поле $U = U^i + U^s$ в, (3)

$$c = -w^i(0,0)D\left(D_{00} - \frac{D}{\omega^2 M}\right)^{-1},$$

где

$$D_{00} = \frac{1}{4\pi^2}\iint \frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2-k^2}}{L(\sqrt{\lambda^2+\mu^2})}d\lambda\, d\mu.$$

Отметим, что интеграл D_{00} явным образом выражается через корни κ_s дисперсионного уравнения (6)

$$D_{00} = \frac{-1}{2\pi}\sum_{s=0}^{4}\frac{\kappa_s^2 - k^2}{5\kappa_s^4 - 4\kappa_s^2 k^2 - k_0^4}\ln\left(\sqrt{\kappa_s^2 - k^2} + ik\right).$$

Рассеянная волна имеет следующую диаграмму направленности

$$\Psi_2 = \frac{-ik\rho_0\omega^2}{4\pi^2}\left(D_{00} - \frac{D}{M\omega^2}\right)^{-1}\frac{ik\sin\vartheta}{\mathcal{L}(\vartheta)}, \tag{8}$$

где

$$\mathcal{L}(\vartheta) = ik\sin\vartheta(k^4\cos^4\vartheta - k_0^4) + 2N.$$

1.4. Сравнение формул (5) и (8)

Формулы (5) и (8) для диаграммы расходящейся акустической волны имеют различные угловые зависимости. Однако, если в выражении для $\mathcal{L}(\vartheta)$ пренебречь плотностью акустической среды, то есть положить $N = 0$, отличие будет лишь во множителе

$$\frac{\Psi_1}{\Psi_2} \approx \frac{D_{00} - \dfrac{D}{M\omega^2}}{\dfrac{i}{8k_0^2} - \dfrac{D}{M\omega^2}}.$$

Именно этот множитель мы и будем сравнивать с единицей. Приводим графики частотной зависимости погрешности

$$\varepsilon = \left| 1 - \frac{\Psi_1}{\Psi_2} \right|$$

для различных масс прикрепленных к стальной пластине.

Графики на рис. 1 показывают, что погрешность ε невелика. Максимум ε достигается в области низких частот. При этом с ростом прикрепленной массы M этот максимум нарастает и сдвигается к низким частотам. Для зажатой точки ($M = \infty$) максимум отвечает нулевой частоте (см. рис. 2). Таким образом для стальной 1 см пластины, находящейся в воздухе, погрешность не превышает долей процента за исключением случая больших масс и очень низких частот. Практически такая же картина наблюдается и для более тонкой 1 мм пластины (см. рис. 3).

Отметим, что в случае пластины, находящейся в воде, погрешность может достигать 60% (см. рис. 4). При этом характер зависимости остается прежним.

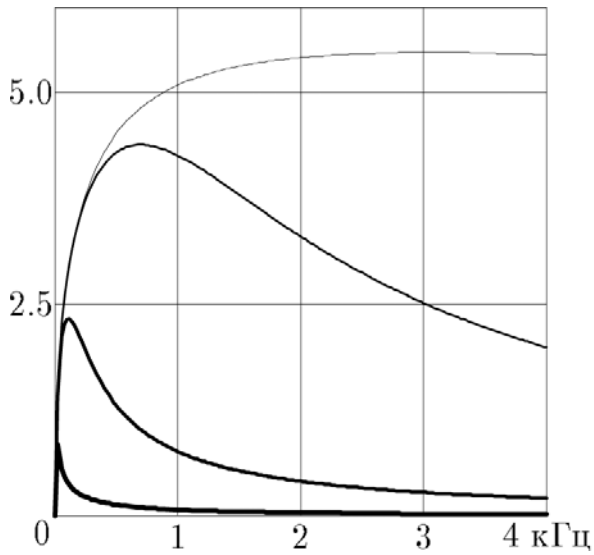

Рис. 1. Нормированные на массу погрешности $\varepsilon/M \cdot 10^4$ для $h = 1$ см, $M = 0.1$, 1, 10 и 100 кг (сверху в низ)

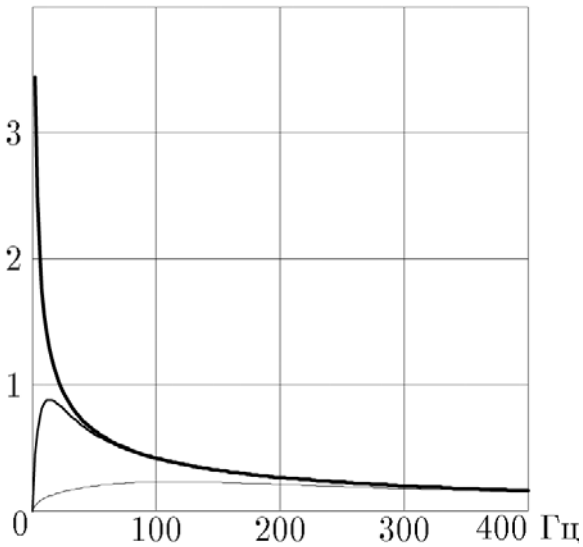

Рис. 2. Погрешности ε в процентах для $h = 1$ см, $M = 10$, 100 кг и $M = \infty$ (снизу вверх)

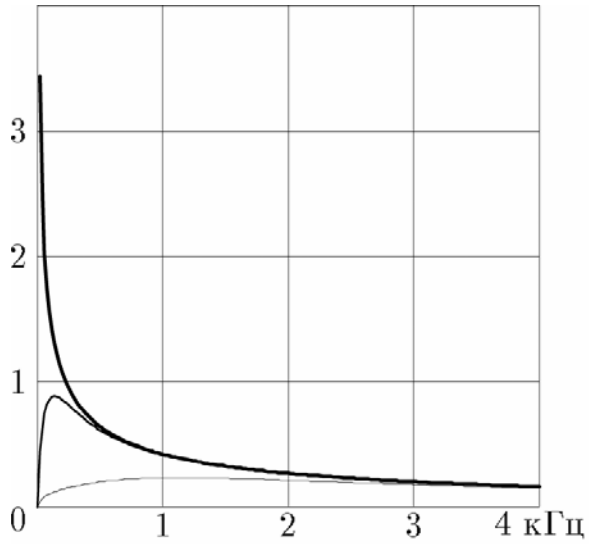

Рис. 3. Погрешности ε в процентах для $h = 1$ мм, $M = 1$, 10, 100 г и для зажатой точки (снизу вверх)

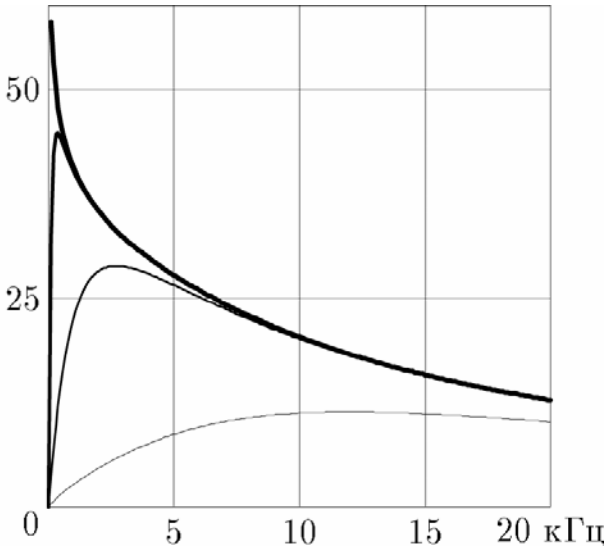

Рис. 4. Погрешности ε для сантиметровой пластины в воде при $M = 1$, 10, 100 кг и для зажатой точки (снизу вверх)

2. РАССЕЯНИЕ НА КОРОТКОЙ ТРЕЩИНЕ

2.1. Постановка задачи и обобщенная точечная модель

Постановка условий на короткой трещине заключается в требовании отсутствия сил и моментов на кромках, то есть

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\sigma)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0\,,\ x = 0, |\,y\,| < a, \tag{9}$$

и ограничении характера сингулярностей в вершинах $x = 0$, $y = \pm a$ которое может быть конкретизировано в виде асимптотик

$$w = w_0 + \rho w_2(\varphi) + \rho^{3/2} w_3(\varphi) + \ldots. \tag{10}$$

То есть член вида $\rho^{1/2} w_1(\varphi)$ не должен присутствовать.

Указанная задача, как в случае изолированной, так и в случае погруженной пластины, может быть сведена к системе интегральных уравнений (см. [5], [6]). При малых a из этих интегральных уравнений могут быть получены асимптотики полей. Однако асимптотическое упрощение может быть произведено еще на стадии постановки задачи. При помощи техники потенциалов нулевого радиуса [7] может быть построена точечная модель короткой трещины. Условия, заменяющие требования (9), (10), формулируются в виде асимптотики смещения [8] (см. также [1]):

$$\begin{aligned} w \sim \frac{a^2}{2}\frac{\sigma b_{20} + b_{02}}{(1-\sigma)(3+\sigma)}((1+\sigma)\ln(\rho/a) + \sigma\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \\ + b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}\frac{x^2}{2} + b_{11}xy + b_{02}\frac{y^2}{2} + \ldots, \end{aligned} \tag{11}$$

в которой коэффициенты b_{ij} — произвольны. На самом деле асимптотика (11) задает пропорциональность сингулярного (логарифмического) члена регулярным (квадратичным).

2.2. Приближенное и точное решения

Задача рассеяния на обобщенной точечной модели (11) позволяет получить явное решение. В случае изолированной пластины падающая изгибная волна

$$w^i = e^{ik_0 x\cos\varphi_0 + ik_0 y\sin\varphi_0}$$

возбуждает рассеянное поле с диаграммой [8]

$$\psi = i\left(\frac{k_0 a}{2}\right)^2 \frac{(\sin^2\varphi_0 + \sigma\cos^2\varphi_0)(\sin^2\varphi + \sigma\cos^2\varphi)}{(1-\sigma)(3+\sigma) - \frac{i}{32}\pi(k_0 a)^2(3+2\sigma+3\sigma^2)}.$$

Согласно приближенному подходу это поле порождает расходящуюся акустическую волну с диаграммой

$$\Psi_1 = i\frac{\rho_0\omega^2}{2\pi}\frac{k^3\cos^2\vartheta(k_0 a)^2}{k^4\cos^4\vartheta - k_0^4}\frac{(\sin^2\varphi_0 + \sigma\cos^2\varphi_0)(\sin^2\varphi + \sigma\cos^2\varphi)}{(1-\sigma)(3+\sigma) - \frac{i}{32}\pi(k_0 a)^2(3+2\sigma+3\sigma^2)}. \tag{12}$$

В случае погруженной пластины имеем волну с диаграммой [1, 8]

$$\Psi_2 = i\frac{\rho_0\omega^2}{2\pi}\frac{k^3\cos^2\vartheta(\kappa a)^2\sin\vartheta}{\mathcal{L}(\vartheta)}\frac{(\sin^2\varphi_0 + \sigma\cos^2\varphi_0)(\sin^2\varphi + \sigma\cos^2\varphi)}{(1-\sigma)(3+\sigma)}\times$$
$$\times\left(1 - \frac{\pi}{16}\frac{3\sigma^2+2\sigma+3}{(1-\sigma)(3+\sigma)}\left(k_0^2 + 8ND_4'\right)\right)^{-1}, \tag{13}$$

где

$$D_\ell' = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{(i\tau)^{\ell+1}\,d\tau}{L(\tau)(\tau^4 - k_0^4)}. \tag{14}$$

2.3. Сравнение диаграмм

Если, как и в случае прикрепленной точечной массы, пренебречь величиной N в знаменателе $\mathcal{L}(\vartheta)$, то обе формулы для диаграмы будут иметь одинаковые угловые распределения. Далее, пренебрегая малыми по ka членами, получим

$$\frac{\Psi_1}{\Psi_2} \sim \left(\frac{k_0}{\kappa}\right)^2.$$

Таким образом, диаграммы отличаются вещественным множителем. Как показывают численные расчеты (см. рис. 5), этот множитель не превышает единицу. Он близок к единице лишь в некотором диапазоне частот. Выше частоты совпадения (частоты при которой $k_0 = k$) волновое число поверхностных волн κ практически совпадает с волновым числом в акустической среде и поверхностная волна превращается в поршневую. При этом $(k_0/\kappa)^2$ быстро уменьшается. При очень низких частотах можно

воспользоваться асимптотикой $\kappa \sim (2N)^{1/5}$, которая показывает, что κ пропорционально $\omega^{2/5}$, в то время как k_0 пропорционально $\sqrt{\omega}$. В низкочастотном диапазоне отношение $(k_0/\kappa)^2$ показано на рис. 6.

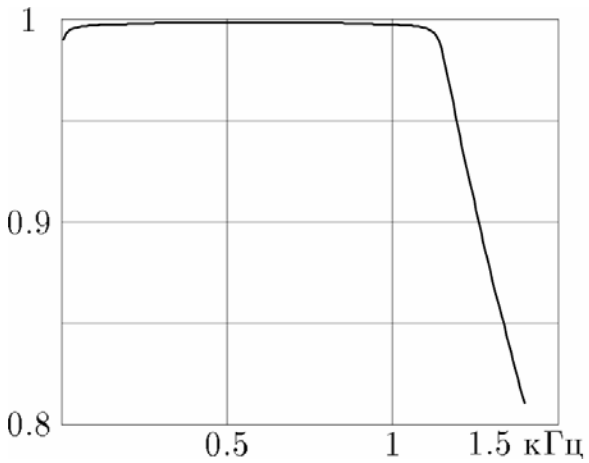

Рис. 5. Отношение $(k_0/\kappa)^2$ для $h = 1$ мм

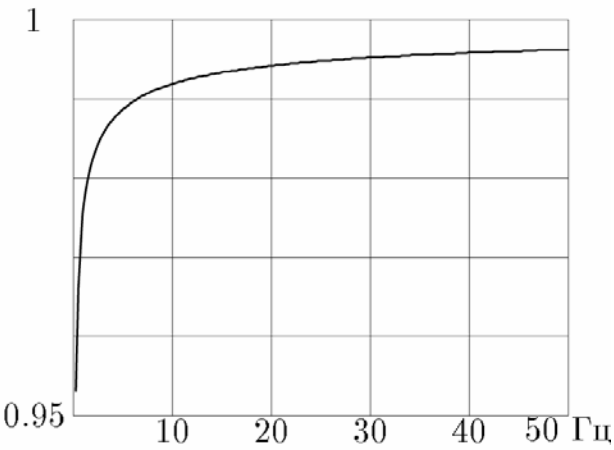

Рис. 6. Отношение $(k_0/\kappa)^2$ для $h = 1$ мм

3. РАССЕЯНИЕ НА КРУГЛОМ ОТВЕРСТИИ

3.1. Постановка задачи и модель

Задача рассеяния на круглом отверстии состоит в нахождении функций U и w, которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца (1), условию неразрывности (2) и динамическому условию (3) вне отверстия, то есть при $x^2 + y^2 > a^2$, а также условию непрерывности давления

$$U(x, y, +0) = U(x, y, -0), \qquad x^2 + y^2 < a^2 \tag{15}$$

и условиям свободной кромки

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Delta w}{\partial \rho} + \frac{1-\sigma}{a^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial \rho \partial^2 \varphi} - \frac{1}{a}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\Bigg|_{\rho=a} = 0, \\ &\Delta w - \frac{1-\sigma}{a}\left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\Bigg|_{\rho=a} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Мы видим, что условия на препятствии, вызывающем рассеяние, которым в данном случае является отверстие радиуса a, состоят из условия (15), формулируемого для акустического давления, и условий (16), формулируемых для изгибного смещения пластины. Очевидно, что в случае изолированной пластины условие (15) исчезает, однако оно учитывается при нахождении акустического поля по заданным смещениям на втором этапе приближенного решения задачи.

Разделение условий, задаваемых на отверстии, на условия для давления и условия для смещений позволяет предложить эффективный способ подбора параметров обобщенной точечной модели, которая моделирует процесс рассеяния при малых

волновых размерах отверстия (см. [1]). Обобщенная точечная модель также формулируется в виде двух независимых условий. В первом условии, задаваемом для функции U влияние пластины не учитывапется. То есть, это условие можно взять таким же как и в задаче с жестким экраном вместо пластины. Как показано в [9], такое условие может быть записано в виде локальной асимптотики

$$U = c\left(\frac{1}{2\pi r} - \frac{1}{2a}\right)(z) + b + o(1), \qquad r \to 0, \tag{17}$$

в которой коэффициенты c и b — произвольные константы (при решении они определяются падающим полем).

Условие для смещений, напротив, не зависит от акустической среды и может быть взято таким же как и в случае изолированной пластины, когда задача рассеяния допускает явное решение в виде рядов Фурье по угловой переменной. Такое решение построено в [10], а в [1] подобраны параметры в условии для смещений. Условие для смещений в обобщенной точечной модели круглого отверстия задаются в виде локальной асимптотики

$$\begin{aligned} w = &-\frac{\sigma a^2}{1-\sigma}(b_{20} + b_{02})\log(\rho/a) + b_{00} + b_{10}\rho\cos\varphi + b_{01}\rho\sin\varphi + \\ &+ b_{20}\frac{\rho^2\cos^2\varphi}{2} + b_{11}\rho^2\cos\varphi\sin\varphi + b_{02}\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{2} + o(\rho^2), \end{aligned} \tag{18}$$

в которой коэффициенты b_{ij} — произвольны. Как и в случае (11) формула (18) задает пропорциональность сингулярного члена регулярным.

3.2. Решение задачи рассеяния на обобщенной модели отверстия

Решение задачи с условиями (17), (18) представляет собой поле точечного источника

$$U^s = cG_1(\mathbf{r}) + c'\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)G(\mathbf{r}).$$

Здесь c и c' — некоторые амплитуды, G_1 функция Грина, отвечающая правой части $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ в уравнении Гельмгольца (1), а G — функция Грина, отвечающая поверхностному источнику и определенная формулой (7). Для G_1 несложно получить

$$G_1 = \frac{(z)}{4\pi^2}\iint e^{i\lambda x + i\mu y - \sqrt{\lambda^2+\mu^2-k^2}|z|}\frac{(\lambda^2+\mu^2)^2 - k_0^4}{L(\sqrt{\lambda^2+\mu^2})}d\lambda\, d\mu.$$

Исследуя интегралы Фурье для G и G_1, можно получить асимптотики

$$U^i + U^s = \left(\frac{c}{2\pi r} + c\left(\frac{ik}{2\pi} + NJ'\right) - c'\frac{2}{D}J_{2'} - \frac{\rho_0\omega^2}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}}\right)(z) + o(1), \quad r \to 0,$$

$$\begin{aligned} w^i + w^s = &\frac{c'}{2\pi D^2 N}\ln\rho - \frac{c}{D}J_{0'} + \frac{c'}{D^2 N}\left(\frac{\ln(k_0/2)+\gamma}{2\pi} - \frac{i}{8} + ND_{2'}\right) + \\ &+ 1 + i\kappa x - \frac{\kappa^2 x^2}{2} - \frac{c}{2D}J_{2'}\rho^2 + \frac{c'}{4D^2 N}\left(\frac{k_0^2}{4} + ND_{4'}\right)\rho^2 + o(\rho^2), \quad \rho \to 0. \end{aligned}$$

Здесь помимо интегралов $D_{\ell'}$, определенных формулой (14), введены интегралы

$$J' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\tau\, d\tau}{L(\tau)\sqrt{\tau^2-k^2}}, \qquad J_{\ell'} = \frac{1}{4\pi^2}\iint\frac{(i\lambda)^{\ell}\, d\lambda\, d\mu}{L(\sqrt{\lambda^2+\mu^2})}.$$

Сравнивая эти асимптотики с условиями обобщенной точечной модели, получим уравнения

$$c\left(\frac{1}{2a}+\frac{ik}{2\pi}+2NJ'\right)-c'\frac{2}{D}J_{2'} = \frac{\rho_0\omega^2}{\sqrt{\kappa^2-k^2}},$$

$$c\frac{J_{2'}}{2D}-c'\left(\frac{1}{8\pi D^2 N}\frac{1-\sigma}{\sigma a^2}+\frac{k_0^2}{32D^2N}+\frac{D_{4'}}{4D^2}\right) = -\frac{\kappa^2}{2}.$$

Решая эти уравнения, определим амплитуды c и c' и найдем диаграмму рассеянной волны. Имеем

$$\Psi_2 = \frac{i\rho_0\omega^2 k}{4\pi^2 N(AB-4(J_{2'})^2)}\frac{ik\sin\vartheta}{\mathcal{L}(\vartheta)}\{A(\kappa^4-k_0^4)(k^4\cos^4\vartheta-k_0^4)+$$
$$+2J_{2'}(\kappa^2(k^4\cos^4\vartheta-k_0^4)+(\kappa^4-k_0^4)k^2\cos^2\vartheta)+B\kappa^2k^2\cos^2\vartheta\}, \tag{19}$$

где

$$A = \frac{1-\sigma}{4\pi N\sigma a^2}+\frac{k_0^2}{8N}+D_{4'}, \qquad B = \frac{1}{2a}+\frac{ik}{2\pi}+2NJ'.$$

Учитывая малость радиуса a и удерживая лишь два старших члена, из точной формулы (19) несложно получить

$$\Psi_2 \sim \frac{i\rho_0\omega^2}{4\pi^2 N}\frac{ik\sin\vartheta}{\mathcal{L}(\vartheta)}\left\{\left(ka-\left(\frac{i}{\pi}+\frac{4N}{k}J'\right)(ka)^2\right)(\kappa^4-k_0^4)(k^4\cos^4\vartheta-k_0^4)+\right.$$
$$\left.+\frac{2\pi N\sigma}{1-\sigma}(\kappa a)^2k^2\cos^2\vartheta\right\}. \tag{20}$$

3.3. Приближенный подход

Приближенный подход состоит из двух этапов. Сначала решается задача для изолированной пластины и вычисляется смещение w, затем решается задача рассеяния на отверстии в деформированной пластине с заданным полем смещений w. Также как и в случае полного учета акустической среды будем использовать условия из обобщенной точечной модели. То есть, в задаче об изолированной пластине будем требовать выполнения условия (18), а при решении задачи рассеяния на отверстии в деформированной пастине будем требовать выполнения условия (17).

Несложно показать, что акустическое поле, вычисляемое в рамках приближенного подхода состоит из двух частей: поля, вызванного деформацией пластины и поля, решающего задачу рассеяния на отверстии в жесткой пластине. Первая часть (вычисления аналогичны приведенным в разделе 2) воспроизводит последний член в формуле (20) с заменой κ на k_0 и обычным отличием в угловой зависимости. Вторая часть представляет собой поле точечного источника

$$U_2 = c\frac{e^{ikr}}{r}.$$

с амплитудой c подлежащей определению. В старшем по малому a порядке эта амплитуда определяется лишь скачком давления в падающей волне. Эта часть поля имеет диаграмму

$$\Psi \sim \frac{i\rho_0\omega^2}{4\pi^2\sqrt{k^2-k_0^2}}ka,$$

которая сходна с первым членом в формуле (20) ввиду тождества

$$\frac{\kappa^4-k_0^4}{N} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2-k^2}}. \tag{21}$$

3.4. Сравнение диаграмм

Итак, и в «точном» и в приближенном выражении для диаграммы присутствуют два слагаемых разной природы. Одно, пропорциональное в старшем порядке ka, связано с эффектом прохождения акустического поля через отверстие. Второе, имеющее порядок $(ka)^2$, связано с перераспределением поля изгибных деформаций вблизи отверстия. Прежде чем выяснять насколько точно эти слагаемые воспроизводятся в приближенной формуле выясним какое из них доминирует в формуле (20). Сравнение осложнено тем фактом, что эти слагаемые имеют разную угловую зависимость и в случае $\vartheta = \pi/2$, то есть непосредственно над или под отверстием последний член обращается в нуль. Для сравнения выберем $\vartheta = 0$. То есть будем сравнивать

$$Q = \frac{2\pi\sigma}{1-\sigma}\frac{Na}{\kappa^4-k_0^4}\frac{\kappa^2k^2}{k_0^4}$$

с единицей. Если Q мало, основной вклад дает первый член в формуле (20). Если же Q велико, то старший вклад дает последний член. Заметим, что в последнем случае применимость приближенного подхода определяется теми же условиями что и в случае короткой трещины (см. параграф 2).

Частотная зависимость Q, приведенная на рис. 7 для случая $a = 10h$, показывает, что второй член в асимптотике (20) может доминировать лишь в диапазоне средних частот, лежащем ниже частоты совпадения. В этом диапазоне приближенный подход дает достаточно хорошие результаты, о чем свидетельствуют результаты параграфа 2.

Сравним теперь насколько точно совпадают слагаемые

$$Q_2 = \frac{i\rho_0\omega^2}{4\pi^2N}(\kappa^4-k_0^4)ka$$

из точной формулы и

$$Q_1 = \frac{i\rho_0\omega^2}{4\pi^2\sqrt{k_0^2-k^2}}ka$$

из приближенной. Ввиду тождества (21) отношение этих выражений сводится к

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \sqrt{\frac{k_0^2 - k^2}{\kappa^2 - k^2}}.$$

Из графика частотной зависимости этого множителя, приведенного на рис. 8, видно, что приближенный подход приводит к совершенно неправильным результатам на частотах близких и превышающих частоту совпадения.

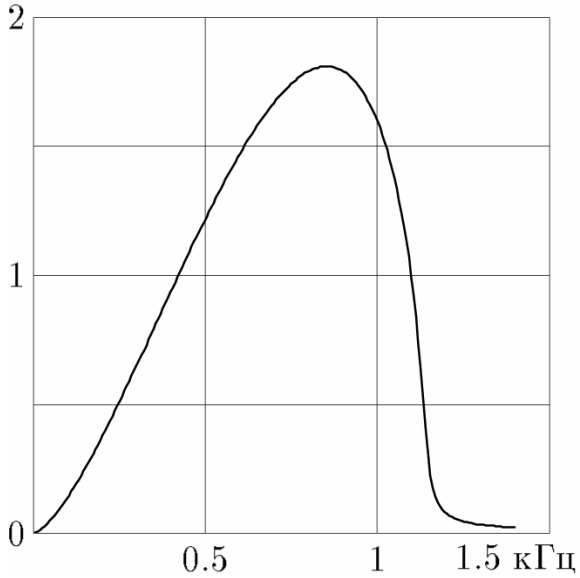

Рис. 7. График Q для h=1 мм, a=10 мм

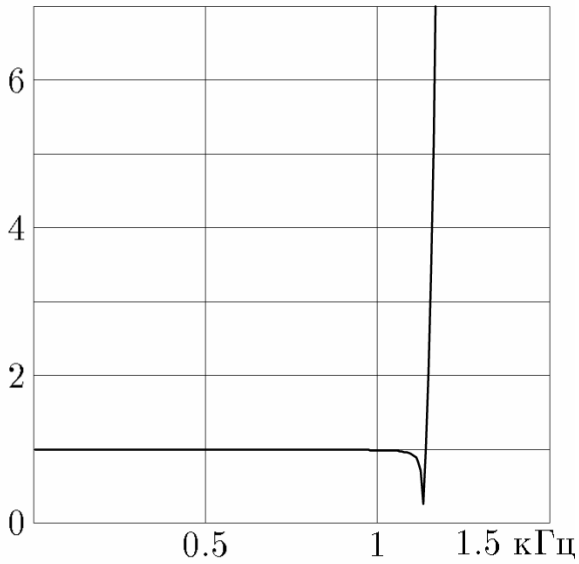

Рис. 8. График Q_2/Q_1 для $h = 1$ мм

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение диаграмм направленности, расчитанных в задачах рассеяния изгибных волн на точечных препятствиях в рамках «точного» и приближенного подходов, показало, что погрешности приближенного подхода в котором не учитывается обратное влияние акустической среды на пластину, могут быть достаточно велики. В случае препятствий, в которых нет отверстий, погрешности могут достигать приблизительно 4%, при этом они максимальны на низких частотах. Если в препятствии имеются свободные кромки, погрешности приближенного подхода увеличиваются, и пренебрегать обратным влиянием акустической среды на пластину нельзя не только в низкочастотном диапазоне, но и на частотах близких и превышающих частоту совпадения. Еще более существенными оказываются погрешности в том случае, если препятствие содержит отверстия ненулевой площади.

Следует отметить, что мы рассматривали лишь задачи рассеяния поверхностных волн на препятствиях малых размеров и пользовались при этом моделью тонкой пластины. В других ситуациях и на более высоких частотах, когда модель тонкой пластины не применима, влияние воздуха может оказаться еще более заметным.

Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00132.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Andronov Generalized point models in structural mechanics, World Scientific 2002.
2. И. И. Клюкин (1971) Борьба с шумом и звуковой вибрацией на судах. Л., «Судостроение».
3. Д. П. Коузов, В. Д. Лукьянов (1975) Влияние точечных неоднородностей на колебания тонкой пластины // Механика твердого тела, № 6, с. 117–123.
4. Д. П. Коузов, В. Д. Лукьянов (1976) О звукопрозрачности тонкой упругой пластины, подкрепленной в дискретном наборе точек // Акуст. журн., т. 22, № 1, с. 43–51.
5. И. В. Андронов (1990) Рассеяние изгибной волны на конечной прямолинейной трещине в упругой пластине, ПММ, т. 54, вып. 2, с. 312–321.
6. И. В. Андронов (1993) Распространение звука в жидкости под упругой пластиной с трещиной, ПММ, т. 57, вып. 2, с. 141–146.
7. Б. С. Павлов (1987) Теория расширений и явно решаемые модели // Успехи матем. наук, т. 42, № 6, с. 99–131.
8. И. В. Андронов (1990) Моделирование процесса рассеяния на трещине в упругой пластине при помощи потенциалов нулевого радиуса // Записки научн. семин. ЛОМИ, т. 186, с. 14–19.
9. Б. С. Павлов, М. Д. Фаддеев (1983) О рассеянии на полом резонаторе с малым отверстием // Записки научн. семин. ЛОМИ, т. 126, с. 156–169.
10. Ю. К. Коненков (1964) Дифракция изгибной волны на круговом препятствии в пластине // Акуст. журн., т. 10(3), с. 186–190.