Электронный журнал «Техническая акустика»
http://www.ejta.org
2008, 13

А. М. Ахтямов[1], Г. И. Гарипова[2]

[1] *Институт механики УНЦ РАН, 450054, г. Уфа, пр. Октября, 71, e-mail: AkhtyamovAM @mail.ru*
[2] *ГОУ ВПО БашГУ, 450074, г. Уфа, ул. Фрунзе, 32, e-mail: GulnaraGI@mail.ru*

Диагностирование механической системы с двумя степенями свободы по собственным частотам и амплитудам её колебаний

Получена 30.04.2008, опубликована 20.05.2008

Механические системы, состоящие из тел с массами, соединенных пружинами, является составной частью многих технических конструкций, находящих широкое применение в различных областях деятельности человека. Известно, что коэффициенты жёсткости пружин и обобщенные массы со временем могут менять свои значения в связи с изношенностью. Поэтому определение коэффициентов жёсткости пружин и обобщенных масс важно для проверки надежности работы механической системы. Об этих характеристиках чаще всего можно судить после разборки устройства, но этот процесс может быть опасным, трудоемким, дорогостоящим и может привести к нарушению приработки деталей. Поэтому в настоящее время интенсивно развивается акустическое диагностирование, решающее задачи оперативного контроля технических конструкций по собственным частотам и амплитудам её колебаний. В настоящей статье предлагается метод, который позволяет восстановить коэффициенты жёсткости пружин и обобщенные массы в механической системе с двумя степенями свободы по значениям собственных частот и амплитудам её колебаний.

Ключевые слова: неразрушающий контроль, амплитуда колебания, собственные частоты, коэффициенты жёсткости пружин, обобщенные массы.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время получило широкое развитие направление, возникшее на стыке теории механизмов с акустикой [1–3], решающее задачи безразборной диагностики технических конструкций. Это направление называется акустической диагностикой. Оно позволяет при диагностировании какой-либо недоступной для визуального осмотра части механической установки сложной структуры проводить анализ её технического состояния, не используя дорогостоящую разборку и не нарушая приработку деталей. Это удобный и наиболее безопасный способ, не требующий больших затрат времени.

Ранее теоретические задачи акустического диагностирования систем, состоящих из тел, соединённых пружинами, решались в [4, 5]. В этих работах были найдены коэффициенты жёсткости пружин c_j, считая массы тел m_j известными. В нашей же статье мы считаем неизвестными как c_j, так и m_j. Также подобные задачи рассматривались в [6–10], где проводили акустическую диагностику закреплений струн, мембран, стержней, пластин и цилиндрических оболочек.

1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Прежде чем поставить обратную задачу, напомним прямую.

Общий вид дифференциальных уравнений движения может быть получен в форме уравнений Лагранжа, которые при консервативных силах имеют известную из курса теоретической механики форму [11, 12]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},\ j=1,2. \tag{1}$$

Также известно, что при малых движениях голономной системы со стационарными связями около положения равновесия кинетическая энергия в канонической форме и потенциальная энергия следующим образом выражаются через обобщенные координаты:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} a_j\dot{q}_j^2,\quad \Pi=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} c_{jk}q_jq_k, \tag{2}$$

где T и Π — кинетическая и потенциальная энергии, c_{jk} — обобщённые коэффициенты жёсткости или квазиупругие коэффициенты, a_j — коэффициенты инерции или инерционные коэффициенты (иногда их называют также обобщёнными или приведёнными массами), q_j и $\dot{q}_j$ — обобщённые координаты и обобщённые скорости, $j=1,2$ — номер координаты. Число степеней свободы равно двум.

Если соответствующее нулевым значениям координат положение равновесия устойчиво, то потенциальная энергия в этом положении имеет изолированный минимум, а второе из выражений (2) есть положительно определённая квадратичная форма. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялся критерий Сильвестра. В этом случае система, выведенная из положения равновесия, совершает свободное колебание [13].

Подставив выражения (2) в уравнение Лагранжа, получим следующую систему линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\alpha_j\ddot{q}_j+\sum_{k=1}^{s} c_{jk}q_k=0,\ j=1,2. \tag{3}$$

Если условие устойчивости равновесия выполнено, то общее решение этой системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$q_j=\sum_{i=1}^{s} A_{ji}\sin(k_it+\beta_i),\ j=1,2, \tag{4}$$

где k_i — собственные частоты, A_{ji} — амплитуды колебаний (первый индекс означает номер координаты, а второй — номер собственной частоты).

При подстановке частного решения в уравнение (3), получим систему алгебраических уравнений, однородную относительно неизвестных амплитуд A_{ji}. При колебаниях все A_{ji} не могут равняться нулю; поэтому, согласно общему свойству однородных систем, должен равняться нулю определитель, составленный из коэффициентов этой системы. Приравняв определитель к нулю, получим частотное уравнение, решив которое, найдём спектр собственных частот. Для рассматриваемых систем, совершающих движение около состояния устойчивого равновесия, все корни этого уравнения вещественны и положительны.

Эта же система позволяет выразить все амплитуды A_{ji} через какую-либо одну из них, например через первую. Каждому корню частотного уравнения будет соответствовать своя собственная форма, определяемая отношениями:

$$\chi_{2i} = \frac{A_{2i}}{A_{1i}},\ i = 1,\ 2. \tag{5}$$

Так решается прямая задача определения собственных частот и амплитуд колебаний механической системы с известными m_1, m_2, c_1, c_2. В настоящее время эта задача достаточно хорошо изучена [11].

2. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, состоящую из двух тел с массами m_1 и m_2, соединенных двумя пружинами, жесткости которых соответственно равны c_1 и c_2 (см. рис. 1.). Пружины будем считать безмассовыми. За обобщенные координаты q_1, q_2 примем горизонтальные перемещения x_1, x_2 грузов, отчитывая эти перемещения от состояния равновесия, в котором пружины не деформированы. Пренебрегаем действием сил трения.

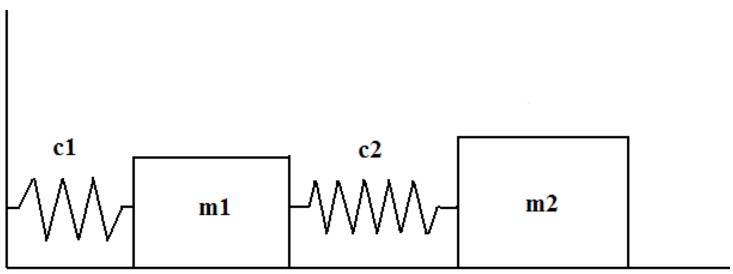

Рис. 1.

Механическая система

Сформулируем теперь обратную задачу. Амплитуды колебаний A_{ji} и спектр собственных частот k_i нам известны. Требуется найти коэффициенты жёсткости пружин c_j и массы тел m_j, где j,i =1, 2.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Запишем для исходной механической системы уравнения (3), положив $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 - c_2\left(x_2 - x_1\right) = 0, \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2\left(x_2 - x_1\right) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $a_1 = m_1$, $a_2 = m_2$, $c_{11} = c_1 + c_2$, $c_{12} = -c_2$, $c_{21} = -c_2$, $c_{22} = c_2$.

Подставим частное решение системы дифференциальных уравнений $q_j = A_{ji}\sin\left(k_it + \beta_i\right)$, соответствующее собственной частоте k_i, в данную систему:

$$\begin{cases} -m_1k_1^2A_{11} + (c_1 + c_2)A_{11} - c_2A_{21} = 0, \\ -m_2k_1^2A_{21} - c_2A_{11} + c_2A_{21} = 0, \\ -m_1k_2^2A_{12} + (c_1 + c_2)A_{12} - c_2A_{22} = 0, \\ -m_2k_2^2A_{22} - c_2A_{12} + c_2A_{22} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Перепишем (7) в виде

$$\begin{cases} -k_1^2A_{11}m_1 + A_{11}c_1 + (A_{11} - A_{21})c_2 = 0, \\ -k_1^2A_{21}m_2 + (A_{21} - A_{11})c_2 = 0, \\ -k_2^2A_{12}m_1 + c_1A_{12} + (A_{12} - A_{22})c_2 = 0, \\ -k_2^2A_{22}m_2 + (A_{22} - A_{12})c_2 = 0. \end{cases}. \tag{8}$$

Получили систему четырёх линейных однородных уравнений с четырьмя неизвестными. Однородная система всегда совместна, так как она имеет тривиальное решение. Поскольку ранг матрицы r не может превосходить размера матрицы ($0 \le r \le \min\{n, m\}$, где m — число уравнений, n — неизвестных), то, очевидно, что $r \le 4$. Если $r < 4$, то система линейных однородных уравнений имеет бесчисленное множество решений. Если $r = 4$, то соответствующая система имеет единственное, причём тривиальное решение. Эти два случая нас не интересуют.

Предположим, что одно из значений m_1, m_2, c_1, c_2 ($m_1 \ne 0, m_2 \ne 0,\ c_1 \ne 0, c_2 \ne 0$) нам известно. Тогда будем иметь систему четырех линейных алгебраических неоднородных уравнений с тремя неизвестными. Согласно теореме Кронекера-Капелли, полученная система будет совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Допустим, что нам известно значение m_1. Расширенная матрица в этом случае будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{11} & A_{11}-A_{21} & k_1^2 A_{11} m_1 \\ -k_1^2 A_{21} & 0 & -A_{11}+A_{21} & 0 \\ 0 & A_{12} & A_{12}-A_{22} & k_2^2 A_{12} m_1 \\ -k_2^2 A_{22} & 0 & A_{22}-A_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем эту матрицу к виду

$$\begin{pmatrix} -k_1^2 A_{21} & 0 & -A_{11}+A_{21} & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{11}-A_{21} & k_1^2 A_{11} m_1 \\ 0 & 0 & \dfrac{A_{21}A_{12}-A_{22}A_{11}}{A_{11}} & m_1 A_{12}(k_2^2-k_1^2) \\ 0 & 0 & l & 0 \end{pmatrix},$$

где $l = \dfrac{A_{22}A_{11}k_2^2 - A_{21}A_{22}k_2^2 - A_{21}A_{12}k_1^2 + A_{22}A_{21}k_1^2}{k_1^2 A_{21}}$. В последней строчке имеем $lc_2 = 0$. Так как по условию $c_2 \neq 0$, следовательно $l = 0$. Получили нулевую последнюю строчку. Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк, то есть трём. Ранг основной матрицы также равен трём. Следовательно, система совместна. А так как ранг равен числу неизвестных, то у системы будет единственное решение. К аналогичному выводу мы придём, если будем считать, что известны либо m_2, либо c_1, либо c_2.

Таким образом, нам удалось показать, что если одно из значений m_1, m_2, c_1, c_2 ($m_1 \neq 0, m_2 \neq 0, c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$) известно, то остальные однозначно определяются по набору собственных частот и амплитудам колебаний механической системы.

В ходе вычислений были получены следующие расчётные формулы. Если известно m_1, то

$$c_2 = \frac{m_1 A_{12} A_{11}(k_2^2 - k_1^2)}{A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11}},\ c_1 = \frac{k_1^2 A_{11} m_1 - (A_{11} - A_{21})c_2}{A_{11}},\ m_2 = \frac{(A_{11} - A_{21})c_2}{-k_1^2 A_{21}};$$

m_2:

$$c_2 = \frac{A_{21}k_1^2 m_2}{A_{21} - A_{11}},\ c_1 = \frac{k_2^2 A_{12} c_2 (A_{11} - A_{21}) + k_1^2 A_{11} c_2 (A_{22} - A_{12})}{A_{11}A_{12}(k_1^2 - k_2^2)},\ m_1 = \frac{-A_{11}c_1 - (A_{11} - A_{21})c_2}{-k_1^2 A_{11}};$$

c_1:

$$c_2 = \frac{A_{11}A_{12}c_1(k_2^2 - k_1^2)}{k_2^2 A_{12}(A_{21} - A_{11}) + k_1^2 A_{11}(A_{12} - A_{22})},\ m_2 = \frac{(A_{11} - A_{21})c_2}{-k_1^2 A_{21}},\ m_1 = \frac{-A_{11}c_1 - (A_{11} - A_{21})c_2}{-k_1^2 A_{11}};$$

c_2:

$$c_1 = \frac{k_2^2 A_{12} c_2 (A_{11} - A_{21}) + k_1^2 A_{11} c_2 (A_{22} - A_{12})}{A_{11}A_{12}(k_1^2 - k_2^2)},\ m_2 = \frac{(A_{11} - A_{21})c_2}{-k_1^2 A_{21}},\ m_1 = \frac{-A_{11}c_1 - (A_{11} - A_{21})c_2}{-k_1^2 A_{11}}.$$

4. ПРИМЕР

Пусть известны собственные частоты $k_1^2 \approx 0{,}725$, $k_2^2 \approx 8{,}275$, а также амплитуды колебаний $A_{11} = 1$, $A_{12} = 1$, $A_{21} = 1{,}569$, $A_{22} = -0{,}319$. Найдём коэффициенты жёсткости пружин c_1, c_2 и массы тел m_1, m_2.

Подставим известные нам данные в систему (8):

$$\begin{cases} -0,725m_1 + c_1 - 0,569c_2 = 0, \\ -8,275m_2 + c_1 + 1,319c_2 = 0, \\ -1,137m_2 + 0,5687c_2 = 0, \\ 2,637m_2 - 1,319c_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система будет иметь ненулевое решение только тогда, когда будет известно одно из значений m_1, m_2, c_1, c_2 ($m_1 \neq 0, m_2 \neq 0,\ c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$). Так, например, если будет известно, что $c_2 = 4$, то можно найти, что

$$c_1 = \frac{k_2^2 A_{12} c_2 (A_{11} - A_{21}) + k_1^2 A_{11} c_2 (A_{22} - A_{12})}{A_{11} A_{12} (k_1^2 - k_2^2)} = 3,\ m_2 = \frac{(A_{11} - A_{21}) c_2}{-k_1^2 A_{21}} = 2,$$

$$m_1 = \frac{-A_{11} c_1 - (A_{11} - A_{21}) c_2}{-k_1^2 A_{11}} = 1.$$ (Аналогично с c_1).

Те же результаты можно получить, зная либо m_1, либо m_2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решенная задача позволяет диагностировать механические системы, состоящие из тел, соединённых пружинами. Найденные формулы дают способ определения неизвестных масс и коэффициентов жёсткости пружин по набору собственных частот и амплитудам колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И., Боровицкий Ю. И., Генкин М. Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979.
2. Генкин М. Д., Соколова А. Г. Виброакустическая диагностика машин и механизмов. М.: Машиностроение, 1987.
3. Павлов Б. В. Акустическая диагностика механизмов. М.: Машиностроение, 1971.
4. Gladwell G. M. L. Inverse problems in vibration. Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1986.
5. Gladwell G. M. L. Inverse problems in vibration-II. Appl Mech Rev, vol. 49, №10, part 2, 1996.
6. Ахтямов А. М. Диагностирование закрепления кольцевой пластины по собственным частотам её колебаний. Известия РАН, МТТ, №6, с. 137–147, 2003.
7. Ахтямов А. М. Диагностирование нераспадающихся закреплений. Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика, № 7, с. 51–52, 2004.

8. Akhtyamov A. M., Moufrakhov A. V. Identification of boundary conditions using natural frequencies. Inverse Problems in Science and Engineering, vol. 12, №4, p. 393–408, 2004.
9. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф. Диагностирование относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки. Электронный журнал «Техническая акустика», http://www.ejta.org, 2004, 19.
10. Ахтямов А. М. Диагностирование закрепления прямоугольной мембраны по собственным частотам её колебаний. Акустический журнал, т. 52, № 2, с. 1–4, 2006.
11. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1991.
12. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960.
13. Кузьмин П. А. Малые колебания и устойчивость движения. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1973.
14. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-томах. Под. ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, т. 1. 1968.
15. Вибрация в технике. Справочник, т .1. Колебания линейных систем. Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение. 1978.
16. Биргер И. А. Техническая диагностика. М.: Машиностроение, 1978.