Электронный журнал «Техническая акустика»
http://www.ejta.org
2008, 4

А. М. Гаврилов

Технологический институт Южного Федерального университета в г. Таганроге
347928 Ростовская обл., Таганрог, ГСП-17А, Некрасовский пер., 44
e-mail: gavr_am@mail.ru

Геометрическая дисперсия сферически расходящегося звукового пучка

Получена 22.02.2008, опубликована 12.03.2008

В приближении квазиоптики для звукового пучка с узким угловым спектром, создаваемого в однородной бездисперсионной среде сферически выпуклым излучателем с равномерным распределением амплитуды, рассмотрены особенности совместного влияния дифракции и геометрической расходимости волны на пространственную динамику дисперсионного параметра и фазового инварианта трехчастотной волны.

Ключевые слова: геометрическая дисперсия, кривизна фазового фронта, волновые пучки, дифракция, геометрическая расходимость, зоны Френеля.

ВВЕДЕНИЕ

Под геометрической дисперсией волновых пучков понимается частотная зависимость фазовой скорости монохроматической волны, распространяющейся в виде пространственно локализованного волнового возмущения в однородной бездисперсионной среде [1, 2]. Не будучи связанной с физическими свойствами среды наличием неоднородностей или внешних границ, ее проявление в рассматриваемом случае обусловлено дифракцией и зависит исключительно от исходных геометрических характеристик волны, излучаемой источником ограниченных размеров.

В отличие от оптики, где из-за большой разницы между поперечным размером пучка и длиной волны (частота колебаний $\omega/2\pi \approx 10^{15}$ Гц) дифракционные процессы проявляются на больших расстояниях и во многих задачах их можно не принимать во внимание, в акустике из-за использования существенно меньших частот ($\leq 10^{7}$ Гц) это соотношение не столь велико. Такое положение сохраняется, несмотря на имеющееся различие в значениях скорости электромагнитных и акустических волн. Поэтому в звуковых пучках дисперсионные проявления дифракции начинают проявляться практически сразу в процессе распространения волны, что делает необходимым учет их влияния с малых удалений от излучателя даже на высоких (для акустики) частотах.

1. ОСОБЕННОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ДИСПЕРСИИ ПУЧКОВ

Часто при обсуждении геометрической дисперсии пучков возникает вопрос о правомерности и целесообразности увязывания понятий дифракции и дисперсии волн, поскольку существуют исторически сложившиеся и формально несвязанные между собой представления об этих процессах. В связи с этим отметим, что наблюдаемые в природе волновые процессы обязаны своим многообразием весьма ограниченному числу факторов [1, 3]. Среди них выделим, с одной стороны, внутренние свойства среды (дисперсия, диссипация, нелинейность), а с другой — геометрические характеристики самой волны: пространственная локализация возмущения, начальная форма фазового фронта, распределение амплитуды вдоль фронта. Обычно дисперсионные свойства безграничной среды связывают с существующим понятием физической дисперсии [1], она обусловлена наличием временных и пространственных масштабов, отражающих внутренние процессы, время протекания или пространственная протяженность которых соизмеримы с периодом или длиной волны. Временная и пространственная нелокальность между внешним воздействием и реакцией среды обязаны своим проявлением разного рода релаксационным процессам и наличию у среды внутренней микроструктуры.

В общем случае проявление частотной дисперсии скорости не ограничивается внутренними процессами в среде [1]. Характерные параметры с размерностью длины и времени, определяющие особенности распространения волн, могут быть связаны с геометрическими характеристиками волны и пространственными условиями ее распространения. Наглядным примером служит геометрическая дисперсия волн в волноводах [1, 4], где в качестве характерного масштаба выступает размер поперечного сечения волновода. Сюда может быть отнесена и дисперсия при распространении неодномерной волны, ограниченной в пространстве в виде дифрагирующего пучка, соответствующим параметром которого является волновой размер излучателя.

Формальным подтверждением правомерности представлять результаты проявления дифракционных процессов в терминах дисперсии является взаимосвязь между дифракционным набегом фазы $\varphi_\partial(z,\omega)$ монохроматической волны в пучке и величиной ее фазовой скорости $c(z,\omega)$, следующая из двух способов записи ее полной фазы

$$\begin{cases} \theta(z,\omega)=\omega(t-z/c_0)+\varphi_\partial(z,\omega)\ ; \\ \theta(z,\omega)=\omega[t-z/c(z,\omega)]\ . \end{cases}$$

После дифференцирования по координате получаем

$$\begin{cases} -\partial\theta(z,\omega)/\partial z=\omega/c_0-\partial\varphi_\partial(z,\omega)/\partial z; \\ -\dfrac{\partial}{\partial z}\theta(z,\omega)=\dfrac{\omega}{c(z,\omega)}\left[1-\dfrac{z}{c(z,\omega)}\cdot\dfrac{\partial c(z,\omega)}{\partial z}\right]\cong\dfrac{\omega}{c(z,\omega)}. \end{cases} \tag{1}$$

Приближенное равенство во втором выражении (1) выполняется при малых изменениях скорости, $c(z,\omega)>>z\,\partial c(z,\omega)/\partial z$, что справедливо для дифракционных процессов. Приравняв правые части обоих выражений (1), получаем

$$c(z,\omega) \cong \frac{c_0}{1-\frac{c_0}{\omega}\cdot\frac{\partial\varphi_\partial(z,\omega)}{\partial z}} \cong c_0\left[1+\frac{c_0}{\omega}\cdot\frac{\partial\varphi_\partial(z,\omega)}{\partial z}\right] = c_0 + \Delta c(z,\omega), \tag{2}$$

где c_0 — скорость плоской волны; $\Delta c << c_0$; $\Delta c(z,\omega)$ — дисперсионная добавка к фазовой скорости. Зависимость фазовой скорости неодномерной волны (2) от расстояния является одной из особенностей геометрической дисперсии в пучке. Это отличает рассматриваемый случай от одномерных волноводов (мелкое море, стержни, пластины и др.), дисперсионные свойства которых неизменны вдоль направления распространения волны. Поэтому существующие подходы к исследованию дисперсии, использующие абсолютные и относительные измерения скорости, здесь оказываются неприменимы, что требует разработки специальных методов ее регистрации [2, 5–7].

Рассмотрение дисперсионных свойств пучков представляет интерес для ряда областей применения ультразвука. Отметим безуспешные попытки измерения физической дисперсии в чистой воде и эмульсиях с использованием высокочувствительного модуляционного метода [8]. Наиболее вероятной причиной, помешавшей получению результатов, следует признать присутствие неучтенной геометрической дисперсии, вклад которой при проведении измерений в ближней области пучка многократно превышает величину физической дисперсии [2]. Достаточно было перенести измерения дисперсии на тонкую проволоку, где из-за малости поперечного размера дифракционный механизм дисперсии отсутствует, чтобы модуляционный метод дал положительные результаты [9, 10].

Подобная ситуация проявилась в измерениях нелинейной дисперсии, обусловленной фазозависимыми нелинейными процессами в трехчастотном волновом пакете [11]. Проведенное в режиме малого сигнала исследование геометрической дисперсии пучка [12] позволило определить область пространства, где ее влияние не сказывается на результатах измерений, и разделить вклады двух физически разных явлений. Как и при исследовании эмульсий, величина геометрической дисперсии из-за дифракции пучка превышает нелинейную дисперсию более чем на порядок. Поэтому неучет ее может оказаться причиной неверных результатов измерения нелинейной составляющей.

Дисперсионное проявление дифракции представляет самостоятельный интерес для многочисленных теоретических и экспериментальных исследований нелинейной акустики ограниченных пучков, поскольку связано с ее влиянием на протекание нелинейных процессов [13–15]. Совместное действие дифракции и нелинейности сопровождается явлениями, не свойственными одномерным волнам (асимметрия искажений временного профиля первоначально гармонической волны, эффекты самовоздействия, включающие самофокусировку, самолокализацию, дефокусировку волн и др.). Сочетание нелинейности и геометрической дисперсии создает физические предпосылки для формирования в традиционно бездисперсионной акустике известных в оптике локализованных и компактных структур (солитон, компактон), в основе которых лежит баланс этих эффектов.

Наблюдаемый в последнее время всплеск интереса к использованию искусственно создаваемой [16, 17] и естественной дисперсии (волноводы) [18, 19] связан с задачей временной компрессии длинных импульсов с целью увеличения их амплитуды и укорочения длительности. Ее решение востребовано в областях, где необходимо получить большую амплитуду зондирующего импульса, исключив негативное проявление нелинейного затухания, в измерительных и диагностических системах высокого пространственного разрешения. В отличие от оптики в акустических задачах редко удается воспользоваться естественно существующей дисперсией, тогда как создание условий для ее проявления зачастую трудно выполнимо технически. В связи с этим встает вопрос об использовании геометрической дисперсии волновых пучков, что предполагает ее детальное исследование.

Многообразие применяемых на практике волновых пучков и возможных способов использования геометрической дисперсии выводит вопрос ее изучения за рамки какого-либо частного случая. Одновременно возникает необходимость рассмотрения задачи о доступных способах “управления” ее величиной и пространственным распределением. Для конкретной среды характер пространственной структуры пучка, а вместе с нею и дисперсионные проявления дифракции неодномерной волны, могут задаваться параметрами граничного условия ($z = 0$) для исходного возмущения. К таким параметрам относятся конфигурация и размеры излучающей поверхности, частота гармонического возмущения, начальная форма фазового фронта и поперечное распределение амплитуды.

В работах [2, 20] экспериментально и теоретически исследуются дисперсионные свойства волны, ограниченной в пространстве в виде осесимметричных пучков с гауссовым, полиномиальным и равномерным начальным распределением амплитуды. На примере дисперсионного параметра и фазового инварианта трехчастотной волны в рамках квазиоптического (малоуглового) приближения прослежены характерные особенности проявления геометрической дисперсии для плоских излучателей круглой формы. К таковым относятся локализация дисперсии в пределах области дифракции Френеля, сильная зависимость ее пространственной структуры от амплитудного распределения вдоль излучающей поверхности, наличие пространственных осцилляций дисперсионного параметра, сопровождающихся резкими изменениями его величины и знака, что получило подтверждение в эксперименте [2].

Наряду с амплитудным распределением исходного возмущения другим доступным способом влиять на величину и пространственную структуру дисперсии является использование такого фактора, как начальная форма фазового фронта. Наиболее просто такой подход реализуется посредством формирования сферически расходящейся (сходящейся) волны с ограниченной протяженностью фронта. Физической моделью рассматриваемой задачи может служить сферическая волна, прошедшая отверстие в непрозрачном экране, радиус кривизны фронта которой определяется расстоянием между точечным источником и экраном. На практике ограниченные волновые пучки с сферически расходящимся фазовым фронтом получают, используя сферически выпуклые излучатели или соответствующее фазовое распределение вдоль антенной решетки. До настоящего времени интерес к ним был обусловлен необходимостью равномерного озвучивания большого объема среды и сокращения времени обзора пространства в задачах диагностики, обнаружения и слежения за быстро перемещающимися объектами, стабилизации акустического контакта с объектом наблюдения, в ультразвуковой технологии и др.

С целью выяснения роли начальной кривизны фазового фронта в [21] проведен теоретический анализ дисперсионных свойств сферически расходящегося гауссового пучка с различным соотношением параметров, характеризующих дифракцию и расходимость волны. В рамках решения параболического уравнения дифракции прослежены особенности совместного проявления этих процессов, качественно различающиеся для малых и больших значений кривизны излучателя. Однако, в акустике гауссов пучок интересен лишь в качестве физической модели исследуемого процесса, которая может быть описана простыми аналитическими выражениями. На практике, как правило, используют излучатели с равномерным возбуждением, что обусловлено рядом причин, включая простоту технической реализации.

В связи с этим, целью данной работы является рассмотрение дисперсионных свойств осесимметричных пучков, создаваемых в однородной бездисперсионной среде сферически выпуклыми излучателями с равномерным распределением амплитуды и различной кривизной поверхности, сравнение их с ранее рассмотренным случаем плоского излучателя в аналогичных условиях [20].

2. ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ПОДХОД К РАССМОТРЕНИЮ ДИСПЕРСИИ ПУЧКА

В основу анализа дисперсионных характеристик сферически расходящегося ультразвукового пучка с узким угловым спектром положим решение параболического уравнения дифракции [1] и принципы, лежащие в основе модуляционного метода измерения дисперсии В. А. Зверева [9, 10]. В осесимметричном пучке с равномерным возбуждением вдоль поверхности излучателя выражение для комплексной амплитуды монохроматической волны, нормированной на начальную величину возмущения A_0 ($z=0$), в произвольной точке пространства имеет вид [22]:

$$P_n(r_n, z_n) = \frac{2i}{z_n}\exp\left(-\frac{ir_n^2}{z_n}\right)\int_0^1 \exp\left[-ir_{n0}^2\,\frac{(1+\delta_0 z_n)}{z_n}\right] J_0\left(\frac{2r_{n0}r_n}{z_n}\right) r_{n0}\,dr_{n0}\,. \tag{3}$$

Здесь

$$z_n = z/l_\partial = 2z/ka^2\,;\quad r_n = r/a\,;\quad \delta_0 = l_\partial/R_0 = ka^2/2R_0\,;\quad P_n(r_n, z_n) = P(r,z)/A_0\,, \tag{4}$$

где r и z — поперечная и продольная (осевая) координаты поля; R_0 и $2a$ — радиус кривизны и размер апертуры излучателя; $k=\omega/c_0$; $l_\partial = ka^2/2$ — протяженность области дифракции Френеля (ближней области); δ_0 — начальная кривизна волнового фронта ($z_n=0$), отнесенная к дифракционной длине пучка.

Для узкополосного сигнала ($\omega_0 >> \Omega$), спектр которого ($\Delta\omega \sim \Omega$) сосредоточен в окрестности частоты $\omega=\omega_0$, локальное поведение закона дисперсии может быть представлено в виде ряда [1]:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (dk/d\omega)_{\omega_0}(\omega - \omega_0) + 0{,}5\left(d^2k/d\omega^2\right)_{\omega_0}(\omega - \omega_0)^2 + \ldots, \tag{5}$$

где $k(\omega_0) = \omega_0 / c_Ф$; $c_Ф$ — фазовая скорость волны с частотой ω_0; $(dk/d\omega)^{-1}_{\omega_0} = c_g$ — групповая скорость волнового пакета; $\left(d^2k/d\omega^2\right)_{\omega_0} = \left(dc_g^{-1}/d\omega\right)_{\omega_0} = D$ — дисперсионный параметр, характеризующий частотную зависимость групповой скорости. Первые два члена (5) соответствуют линейному приближению функции $k(\omega)$ и описывают неискаженное распространение волнового пакета с групповой скоростью c_g. Дисперсионные искажения, проявляющиеся в изменении формы огибающей волнового пакета и фазовой модуляции его высокочастотного заполнения, учитываются квадратичным и последующими членами. При рассмотрении распространения узкополосных сигналов ($\omega_0 >> \Omega$) достаточно воспользоваться вторым приближением теории дисперсии, т.е. третьим слагаемым.

Дисперсионный параметр D найдем посредством регистрации нарушений фазового синхронизма между Фурье-компонентами многочастотной волны. Наиболее просто это реализуется в рамках модуляционного метода измерения дисперсии [9, 10] при использовании трехчастотной волны с симметричным спектром (ω_0, $\omega_{Н,\,В} = \omega_0 \mp \Omega$):

$$\begin{aligned} p(t,r,z) &= P_0(r,z)\cos[\omega_0 t - k_0 z + \varphi_0(r,z) + \varphi_0] + \\ &+ P_Н(r,z)\cos[\omega_Н t - k_Н z + \varphi_Н(r,z) + \varphi_{Н0}] + P_В(r,z)\cos[\omega_В t - k_В z + \varphi_В(r,z) + \varphi_{В0}] = \\ &= P(t,r,z)\cos[\omega_0 t - k_0 z + \varphi(t,r,z) + \varphi_0], \end{aligned} \tag{6}$$

где $P_0(r,z)$, $P_Н(r,z)$, $P_В(r,z)$ и $\varphi_0(r,z)$, $\varphi_Н(r,z)$, $\varphi_В(r,z)$ — дифракционные изменения амплитуд и фаз гармоник; φ_0, $\varphi_{Н0}$, $\varphi_{В0}$ — начальные ($z = 0$) фазы компонент; $P(t)$ и $\varphi(t)$ описывают амплитудную и фазовую модуляцию [2]. Тогда

$$D(\omega_0, r, z) = \frac{d^2k(\omega_0, r, z)}{d\omega^2} = -2\frac{\beta(r,z) - \beta_0}{z\Omega^2} = -2\frac{\Delta\beta(r,z)}{z\Omega^2}, \quad \left[\frac{c^2}{м \cdot рад}\right], \tag{7}$$

где $\beta_0 = [(\varphi_{Н0} + \varphi_{В0})/2 - \varphi_0]$ — начальное ($z = 0$) значение фазового инварианта (ФИ) трехчастотного сигнала; $\beta(r,z) = [(\varphi_Н(r,z) + \varphi_В(r,z))/2 - \varphi_0(r,z)]$ — ФИ в произвольной точке наблюдения. Для нахождения пространственного распределения дисперсионного параметра достаточно определить дифракционный набег (расстройку) ФИ $\Delta\beta(r,z)$. Дисперсионные искажения отсутствуют ($D = 0$), если в процессе распространения между гармониками ($\omega_Н$, ω_0, $\omega_В$) сохраняется фазовый синхронизм, т.е. $\Delta\beta(r,z) = 0$. В бездисперсионных средах эта ситуация возможна только у одномерных волн.

В общем случае дифракционная расстройка фазового инварианта $\Delta\beta$ в (7) находится из (3) через значения аргумента комплексной амплитуды на частотах $\omega_Н$, ω_0 и $\omega_В$:

$$\Delta\beta(r_n, z_{n0}) = 0{,}5[\arg P_{nН}(r_n, z_{n0}) + \arg P_{nВ}(r_n, z_{n0})] - \arg P_{n0}(r_n, z_{n0}) \tag{8}$$

с учетом частотного параметра $Ф = \omega_0/\Omega$ в безразмерных величинах z_n и δ_0 (4):

$$
\begin{aligned}
&\omega = \omega_0: && z_n = z_{n0}; && \delta_{0(0)} = \delta_0;\\
&\omega = \omega_H: && z_{nH} = z_{n0}\Phi/(\Phi - 1); && \delta_{0H} = \delta_0(\Phi - 1)/\Phi;\\
&\omega = \omega_B: && z_{nB} = z_{n0}\Phi/(\Phi + 1); && \delta_{0B} = \delta_0(\Phi + 1)/\Phi,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $z_{n0} = z/l_{\partial 0} = 2z/k_0 a^2$; $k_0 = \omega_0/c_0$. С учетом (9) выражения P_{n0}, P_{nH} и P_{nB} запишутся

$$
\begin{aligned}
&P_{n0}(r_n, z_{n0}) = \frac{2i}{z_{n0}}\exp\left(-\frac{ir_n^2}{z_{n0}}\right)\int_0^1 \exp\left[-ir_{n0}^2\frac{(1+\delta_0 z_{n0})}{z_{n0}}\right] J_0\left(\frac{2r_{n0}r_n}{z_{n0}}\right) r_{n0}dr_{n0};\\
&P_{nH}(r_n, z_{n0}) = \frac{2i(\Phi-1)}{z_{n0}\Phi}\exp\left[-\frac{ir_n^2(\Phi-1)}{z_{n0}\Phi}\right]\int_0^1 \exp\left[-ir_{n0}^2\frac{(1+\delta_0 z_{n0})(\Phi-1)}{z_{n0}\Phi}\right]\times\\
&\times J_0\left(2r_{n0}r_n(\Phi-1)/z_{n0}\Phi\right) r_{n0}dr_{n0};\\
&P_{nB}(r_n, z_{n0}) = \frac{2i(\Phi+1)}{z_{n0}\Phi}\exp\left[-\frac{ir_n^2(\Phi+1)}{z_{n0}\Phi}\right]\int_0^1 \exp\left[-ir_{n0}^2\frac{(1+\delta_0 z_{n0})(\Phi+1)}{z_{n0}\Phi}\right]\times\\
&\times J_0\left(2r_{n0}r_n(\Phi+1)/z_{n0}\Phi\right) r_{n0}dr_{n0}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Для нахождения дисперсионного параметра пучка на частоте ω_0 необходимо в выражении (8) с учетом (10) взять предел при $\Phi \to \infty$:

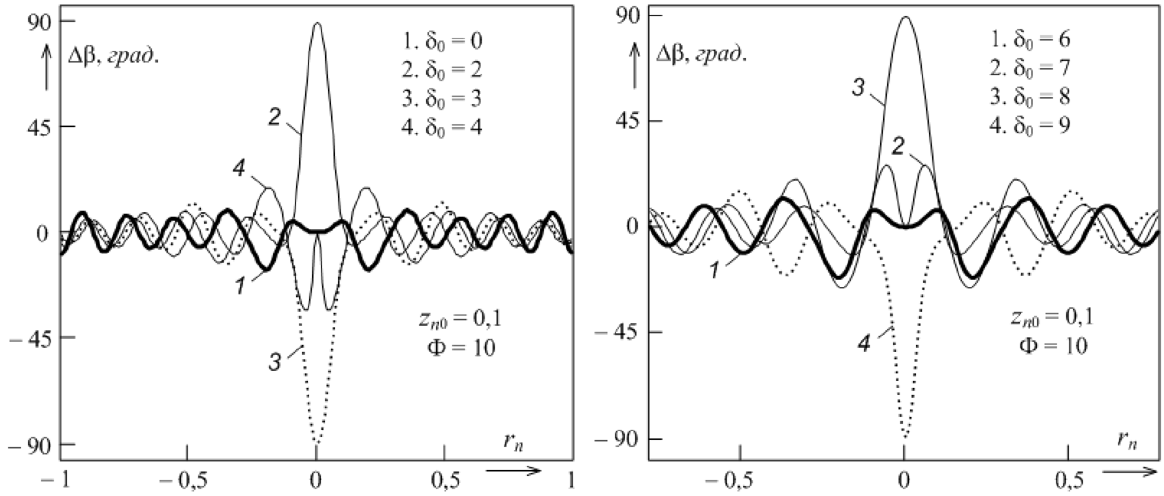
$$
D_n(r_n, z_{n0})_{\omega_0} = \omega_0^2 l_{\partial 0} D(r_n, z_{n0})_{\omega_0} = -(2/z_{n0})\lim_{\Phi\to\infty}\left[\Phi^2\Delta\beta(r_n, z_{n0}, \Phi)\right], \quad (\textit{рад}). \tag{11}
$$

Очевидно, что выполнение условия $\Phi \to \infty$ приведет к тому, что расстройка фазового инварианта (8) будет равна нулю во всех точках поля. При конечных значениях частотного параметра выражение (11) позволяет найти усредненную в полосе частот измерительного сигнала ($\Delta\omega = 2\Omega$) величину дисперсионного параметра в окрестности частоты ω_0.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗОВОГО ИНВАРИАНТА И ДИСПЕРСИОННОГО ПАРАМЕТРА В БЛИЖНЕЙ ОБЛАСТИ ПОЛЯ

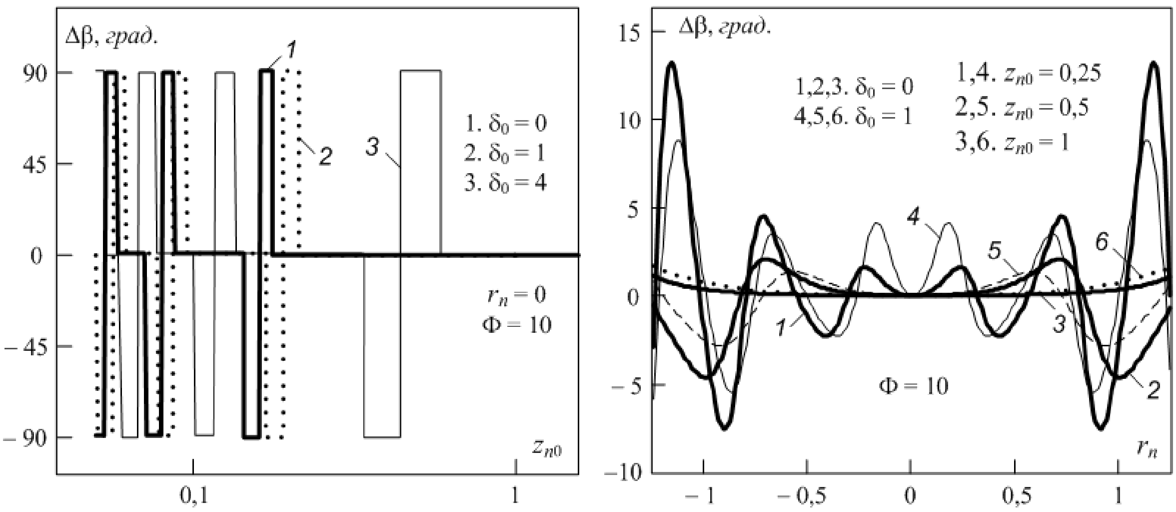
Результаты расчета поперечного распределения дифракционной расстройки фазового инварианта трехчастотной волны $\Delta\beta(r_n)$ вблизи излучателя ($z_{n0} = 0{,}1$) для $\Phi = 10$ показаны на рис. 1. Влияние кривизны излучателя, величина которой изменялась в интервале $\delta_0 = (0...9)$, наиболее сильно проявляется в приосевой области. Отметим, что на оси пучка $\Delta\beta$ может принимать одно из трех возможных значений: 0 и $\pm\pi/2$. Данная особенность свойственна пучкам, создаваемым излучателями с равномерным распределением амплитуды вне зависимости от значения их кривизны. Обусловлено это равенством вкладов, вносимых в формируемое на оси поле соседними зонами Френеля [20], рис. 2-а.

Вне оси зависимость $\Delta\beta(r_n)$ является непрерывной осциллирующей функцией, размах которой при $\delta_0 > 0$ спадает по мере приближения к краям пучка. С увеличением расстояния z_n общий характер изменений поперечного распределения ФИ качественно повторяет пространственную динамику этого параметра в поле поршневого излучателя ($\delta_0 = 0$), рис. 2-б. Основной тенденцией этих изменений является постепенное смещение осцилляций на периферию пучка в процессе распространения волны.



а) б)

Рис. 1. Поперечные распределения расстройки ФИ вблизи излучателя



а) б)

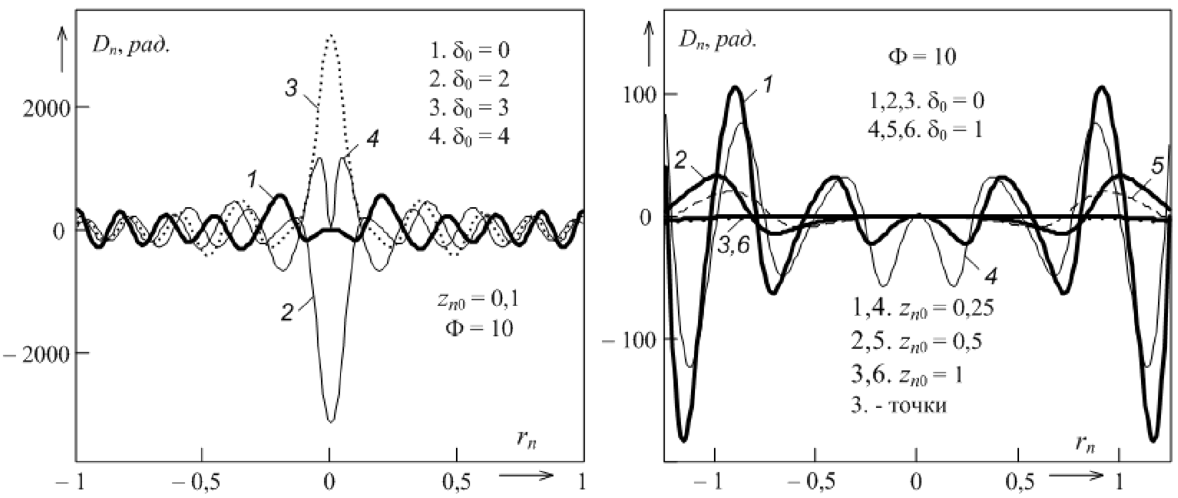
Рис. 2. Осевые и поперечные распределения ФИ в ближней области поля

Свойственная круглому поршню [20] ступенчатая форма осевого распределения $\Delta\beta$ сохраняется при изменении кривизны излучающей поверхности в широких пределах, рис. 2-а. Вместе с этим рост δ_0 сопровождается изменениями осевого распределения ФИ в ближней области поля, приводя к удалению от излучателя имеющихся на нем ступенчатых участков. Координаты биполярных разрывов между ступенчатыми участками функции $\Delta\beta\left(r_n = 0, z_{n0}\right)$ равны

$$z_{n0} = 1/\left(2\,\mathrm{j}\,\pi - \delta_0\right), \quad (\mathrm{j} = 1,\ 2,\ldots) \qquad (12)$$

и совпадают с положением разрывов на осевых распределениях главного значения фазы волны с частотой ω_0 [22]. Точкам с координатами (12) соответствует четное число фазовых зон на излучателе, вклады которых на оси взаимно компенсируются, приводя к формированию здесь локальных участков поля с нулевой амплитудой.

Поперечные распределения дисперсионного параметра, соответствующие приведенным выше зависимостям фазового инварианта, показаны на рис. 3. По мере удаления от излучателя на общем виде зависимостей $D_n(r_n)$ и их поведении прослеживаются те же качественные изменения, что и на аналогичных распределениях ФИ. Нарушение фазового синхронизма между Фурье-гармониками трехчастотного сигнала, порождаемое геометрической дисперсией, приводит к появлению конечных значений расстройки ФИ, знак которой противоположен знаку дисперсионного параметра. Различие в знаках D_n и $\Delta\beta$ непосредственно следует из соотношений (7) и (11). Пространственная неоднородность дисперсионных свойств препятствует накоплению фазовых искажений трехчастотной волной в ближней области пучка. В результате искажения «вытесняются» из приосевой области на периферию пучка, где дисперсионный параметр имеет большие абсолютные значения.



а) б)

Рис. 3. Поперечные распределения дисперсионного параметра

4. ОСЕВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗОВОГО ИНВАРИАНТА И ДИСПЕРСИОННОГО ПАРАМЕТРА

Решение (3) для оси пучка ($r_n = 0$) принимает простой вид

$$P_n(0, z_n) = (1/(1+\delta_0 z_n))[1 - \exp(-i(1+\delta_0 z_n)/z_n)],$$

откуда для действительной амплитуды и фазы получаем следующие выражения:

$$|P_n(0, z_n)| = (1/z_n)\cdot|\sin[(1+\delta_0 z_n)/2z_n]|/[(1+\delta_0 z_n)/2z_n]; \tag{13}$$

$$\varphi_\partial(0, z_n) = -\frac{1+\delta_0 z_n}{2z_n} + \pi\left\{\frac{3}{2} - \mathrm{sign}\left[\sin\left(\frac{1+\delta_0 z_n}{2z_n}\right)\right]\right\} = \varphi_{\partial 1}(0, z_n) + \varphi_{\partial 2}(0, z_n). \tag{14}$$

Первое слагаемое в (14) $\varphi_{\partial 1}(0, z_n)$ описывает дифракционный набег фазы вдоль оси, тогда как второе $\varphi_{\partial 2}(0, z_n)$, содержащее ступенчатую единичную функцию, отражает интерференцию вкладов зон Френеля. С учетом двух механизмов формирования фазовой структуры поля расстройка фазового инварианта (8) запишется в виде суммы

$$\Delta\beta(0, z_{n0}) = \Delta\beta_1(0, z_{n0}) + \Delta\beta_2(0, z_{n0}), \tag{15}$$

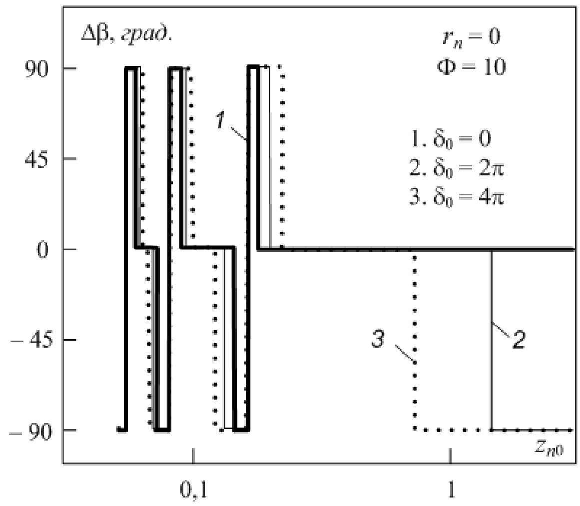
где при любых значениях частотного параметра Φ справедливо равенство

$$\Delta\beta_1(0, z_{n0}) = -\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\delta_0 z_{n0})(\Phi-1)}{2z_{n0}\Phi} + \frac{(1+\delta_0 z_{n0})(\Phi+1)}{2z_{n0}\Phi}\right] - \frac{1+\delta_0 z_{n0}}{2z_{n0}}\right\} = 0. \tag{16}$$

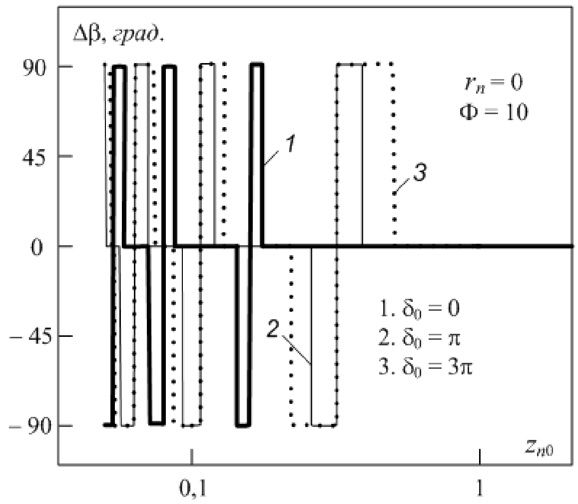
Выражение (15) с учетом (16) принимает вид

$$\begin{aligned}\Delta\beta(0, z_{n0}) \equiv \Delta\beta_2(0, z_{n0}) = -\pi\ \{0{,}5[\mathrm{sign}[\sin((1+\delta_0 z_{n0})(\Phi-1)/2z_{n0}\Phi)]+ \\ + \mathrm{sign}[\sin((1+\delta_0 z_{n0})(\Phi+1)/2z_{n0}\Phi)]] - \mathrm{sign}[(\sin((1+\delta_0 z_{n0})/2z_{n0}))]\}.\end{aligned} \tag{17}$$

Осевые распределения расстройки фазового инварианта, рассчитанные для разных значений кривизны излучателя, приведены на рис. 2-а и рис. 4. Среди особенностей функции $\Delta\beta(0, z_{n0})$ следует отметить повторяемость основных ее закономерностей для ряда значений δ_0, отличающихся между собой на 2π. В качестве примера показаны два семейства осевых зависимостей ФИ, соответствующих $\delta_0 = (0,\ 2\pi,\ 4\pi)$ и $\delta_0 = (\pi,\ 3\pi)$, рис. 4. Кривые в каждом из этих семейств отличаются лишь шириной ступенчатых участков, которая пропорциональна кривизне излучателя. Наблюдаемое совпадение координат биполярных разрывов между ступенчатыми участками у разных кривых следует из поведения осевых распределений главного значения фазы монохроматической волны (14). Ранее [22] было показано, что для отмеченных случаев зависимости $\varphi_\partial(0, z_n)$ практически не отличаются между собой.



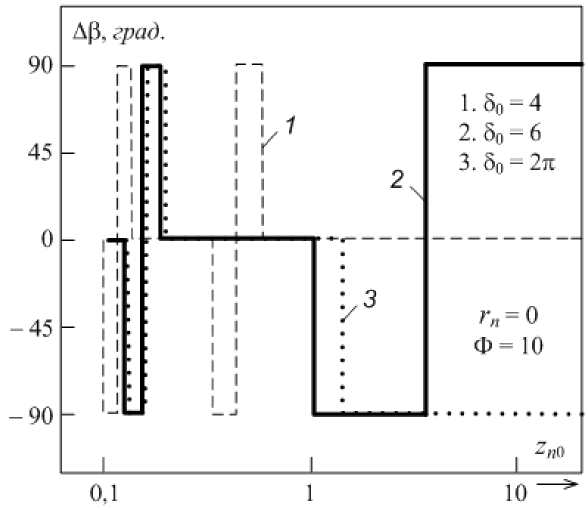
а)



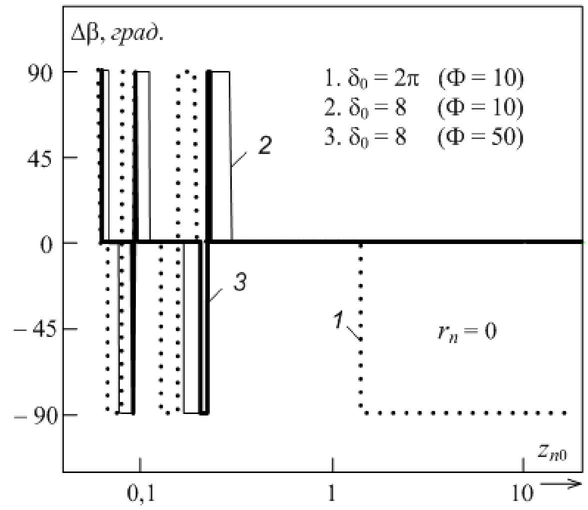
б)

Рис. 4. Осевые распределения фазового инварианта для $\delta_0 = \pi l$, ($l = 0,\ 1,\ 2,...$)

Характерной особенностью осевых распределений $\Delta\beta(0, z_{n0})$ при $\delta_0 = (2\pi,\ 4\pi, ...)$ является появление в дальней области поля ($z_{n0} > 1$) конечного значения расстройки ФИ $\Delta\beta = -\pi/2$. Столь значительные фазовые искажения способны существенно повлиять на вид модуляции [2] излучаемого волнового пакета, например, изменить амплитудную модуляцию на фазовую или наоборот. Если у плоского излучателя за пределами ближней области $\Delta\beta = 0$, т.е. модулированная волна восстанавливает свою исходную фазовую структуру, то здесь искажения в виде $\Delta\beta = -\pi/2$ сохраняются и на больших расстояниях, несмотря на завершение дифракционных процессов. Формально данную ситуацию можно объяснить помещением в бесконечность координаты наиболее удаленного от излучателя биполярного разрыва функции $\Delta\beta(0, z_{n0})$, как это следует из (12). В качестве иллюстрации этого процесса на рис. 5 показаны осевые распределения расстройки ФИ для нескольких значений кривизны в окрестности $\delta_0 = 2\pi$. Отмеченная особенность осевого распределения $\Delta\beta(0, z_{n0})$ при $\delta_0 = (2\pi,\ 4\pi, ...)$ обусловлена специфической структурой поля, формируемой четным числом зон Френеля [22].



а)



б)

Рис. 5. Динамика осевых распределений фазового инварианта вблизи $\delta_0 = 2\pi$

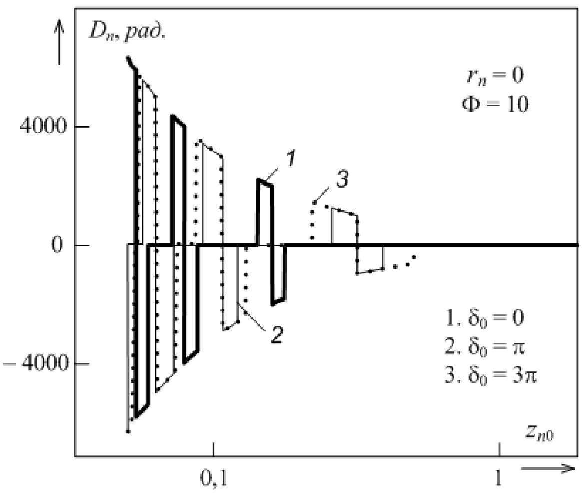
Влияние частотного параметра на рассматриваемые зависимости видно на примере кривых 2 и 3, рис. 5-б. Поскольку увеличение Ф равносильно сужению спектра трехчастотной волны и выравниванию волновых размеров пучка, из-за ослабления различий дифракционных процессов для каждой из частот (ω_H, ω_0, ω_B) в пределе $\Phi \to \infty$ ширина ступенчатых участков стремится к нулю, т.е. $\Delta\beta \to 0$ на всей оси.

Для случаев $\delta_0 = (2\pi,\ 4\pi, ...)$ рост Ф сопровождается смещением координаты наиболее удаленного отрицательного скачка $\Delta\beta$ в область больших z_{n0}. В случае волнового пакета с непрерывным спектром, локализованным в окрестности ω_0, процесс формирования фазовой структуры оказывается распределенным в пространстве. При его распространении расстройка $\Delta\beta = -\pi/2$ появляется вначале у наиболее удаленных от средней частоты ω_0 симметрично расположенных Фурье-компонент ω_H и ω_B, а по мере продвижения волны этот процесс охватывает более близкие к ω_0 пары спектральных компонент.

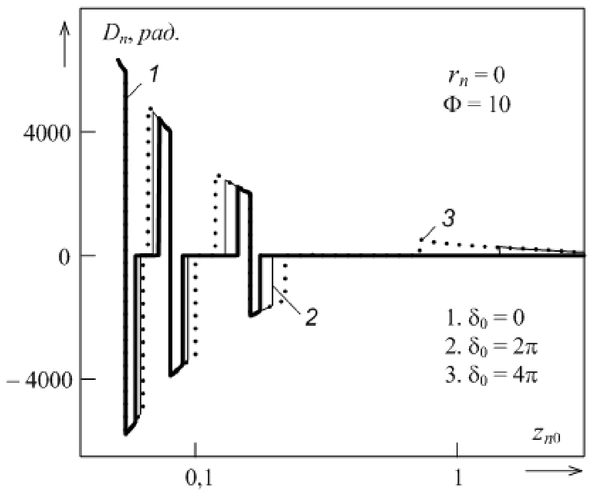
При произвольном значении Φ дисперсионный параметр на оси пучка с учетом (17) описывается выражением

$$D_n(0, z_{n0}) = -\frac{2\Phi^2}{z_{n0}}\Delta\beta_2(0, z_{n0}) = \frac{2\pi\Phi^2}{z_{n0}}\left\{\frac{1}{2}\left[\operatorname{sign}\left[\sin\left(\frac{(1+\delta_0 z_{n0})(\Phi-1)}{2z_{n0}\Phi}\right)\right]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\operatorname{sign}\left[\sin((1+\delta_0 z_{n0})(\Phi+1)/2z_{n0}\Phi)\right]\right]-\operatorname{sign}\left[(\sin((1+\delta_0 z_{n0})/2z_{n0}))\right]\right\}. \quad (18)$$

Осевые распределения D_n, рассчитанные для $\Phi = 10$ и разных значений кривизны излучателя δ_0, показаны на рис. 6. Зависимости $D_n(0, z_{n0})$ имеют форму ступенчатых функций с огибающей вида $D_n \sim 1/z_{n0}$. В местах биполярных разрывов соблюдаются те же особенности, которые отмечались на осевых распределениях $\Delta\beta$ для значений кривизны δ_0, разнесенных на $2\pi l$. За пределами ближней области поля ($z_{n0} > 1$) при $\delta_0 \neq 2\pi l$ величина D_n равна нулю (рис. 6-а), либо монотонно убывает с расстоянием при $\delta_0 = 2\pi l$ (кривые 2 и 3 на рис. 6-б).



а)



б)

Рис. 6. Осевые распределения дисперсионного параметра для $\delta_0 = \pi l$, $l = (0,\ 1,\ 2,...)$

При нахождении осевого распределения дисперсионного параметра на частоте ω_0 взятие предела от (18) при $\Phi \to \infty$ приводит к неопределенности типа $(0 \cdot \infty)$. Раскрытие ее предполагает дифференцирование ступенчатой функции, для чего воспользуемся соотношением [3] $d/dx\{\operatorname{sign}[f(x)]\} = \delta[f(x)] \cdot f'_x(x)$, где $\delta(x)$ — функция Дирака. В результате получаем

$$D_n(0,z_{n0})=-\frac{\pi\Phi(1+\delta_0 z_{n0})}{4z_{n0}^2}\left[\delta_1\left(\sin\left(\frac{(1+\delta_0 z_{n0})(\Phi-1)}{2z_{n0}\Phi}\right)\right)\cdot\cos\left[\frac{(1+\delta_0 z_{n0})(\Phi-1)}{2z_{n0}\Phi}\right]-\right.$$
$$\left.-\delta_2\left(\sin\left((1+\delta_0 z_{n0})(\Phi+1)/2z_{n0}\Phi\right)\right)\cdot\cos\left[(1+\delta_0 z_{n0})(\Phi+1)/2z_{n0}\Phi\right]\right], \tag{19}$$

Из-за сохраняющейся в (19) неопределенности $(0\cdot\infty)$ повторное использование правила Лопиталя сделаем после несложных преобразований:

$$D_n(r_n,z_{n0})=-\frac{\pi}{4z_{n0}^2}\left[(\delta_1-\delta_2)\cdot\Phi\cos\left(\frac{1+\delta_0 z_{n0}}{2z_{n0}}\right)\cos\left(\frac{1+\delta_0 z_{n0}}{2z_{n0}\Phi}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{(\delta_1+\delta_2)}{2z_{n0}}(1+\delta_0 z_{n0})\sin\left(\frac{1+\delta_0 z_{n0}}{2z_{n0}}\right)\frac{\sin\left((1+\delta_0 z_{n0})/2z_{n0}\Phi\right)}{(1+\delta_0 z_{n0})/2z_{n0}\Phi}\right]. \tag{20}$$

С учетом накладываемого условия $\Phi\to\infty$ в (20) можно провести очевидные замены:

$$\delta_1\left(\sin\left(\frac{(1+\delta_0 z_{n0})(\Phi-1)}{2z_{n0}\Phi}\right)\right)+\delta_2\left(\sin\left(\frac{(1+\delta_0 z_{n0})(\Phi+1)}{2z_{n0}\Phi}\right)\right)\Bigg|_{\Phi\to\infty}\cong 2\delta\left(\sin\left(\frac{1+\delta_0 z_{n0}}{2z_{n0}}\right)\right);$$
$$\frac{\sin\left((1+\delta_0 z_{n0})/2z_{n0}\Phi\right)}{(1+\delta_0 z_{n0})/2z_{n0}\Phi}\Bigg|_{\Phi\to\infty}\cong 1;\qquad \cos\left(\frac{1+\delta_0 z_{n0}}{2z_{n0}\Phi}\right)\Bigg|_{\Phi\to\infty}\cong 1. \tag{21}$$

Принимая во внимание (21), выражение (20) можно переписать:

$$D_n(0,z_{n0})=-\frac{\pi}{4z_{n0}^2}\left[\frac{\delta_1-\delta_2}{1/\Phi}\cos\left(\frac{1+\delta_0 z_{n0}}{2z_{n0}}\right)+\frac{1+\delta_0 z_{n0}}{z_{n0}}\delta\left(\sin\left(\frac{1+\delta_0 z_{n0}}{2z_{n0}}\right)\right)\sin\left(\frac{1+\delta_0 z_{n0}}{2z_{n0}}\right)\right]. \tag{22}$$

Здесь от частотного параметра зависит лишь множитель $(\delta_1-\delta_2)/(1/\Phi)$, к которому применим правило Лопиталя, используя правила дифференцирования δ-функции: $\delta'_x(x)=-\delta(x)/x$; $\delta'_x[f(x)]=-f'_x(x)\delta[f(x)]/f(x)$.

В результате из (22) получаем простое выражение

$$D_n(0,z_{n0})=-\left(\pi/2z_{n0}^2\right)\cdot[x/\sin(x)]\cdot\delta[\sin(x)],\quad \text{где}\quad x=(1+\delta_0 z_{n0})/2z_{n0}, \tag{23}$$

которое можно преобразовать, используя представление δ-функции от сложного аргумента в виде ряда [3]

$$\delta[f(x)]=\sum_k\delta(x-x_k)/|f'_x(x_k)|, \tag{24}$$

где x_k — корни уравнения $f(x)=0$. Здесь $f(x)=f(z_{n0})=\sin[(1+\delta_0 z_{n0})/2z_{n0}]$. Корни найдем из уравнения $(1+\delta_0 z_{n0})/2z_{n0}=k\pi$, где $k=0,\ 1,\ 2,\ldots$:

$$z_{n0k}=1/(2\pi k-\delta_0),\quad k=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{25}$$

Производная $|f'_x(x_k)|$ в выражении (24) равна

$$\left|\frac{d}{dz_{n0}}\sin\left(\frac{1+\delta_0 z_{n0}}{2z_{n0}}\right)\right|_{z_{n0k}}=\frac{1}{2z_{n0k}^2}\left|\cos\left(\frac{1+\delta_0 z_{n0k}}{2z_{n0k}}\right)\right|=\frac{1}{2z_{n0k}^2}. \tag{26}$$

После подстановки (24) – (26) в выражение (23) получаем

$$D_n(0,z_{n0})=-\pi\sum_k\frac{\pi k}{\sin(\pi k)}\cdot\delta(z_{n0}-z_{n0k})=-\pi\sum_k\frac{\pi k}{\sin(\pi k)}\cdot\delta\left(z_{n0}-\frac{1}{2\pi k-\delta_0}\right). \tag{27}$$

Согласно (27) дисперсионный параметр на оси пучка равен нулю везде, исключая точки с координатами z_{n0k}, где функция не определена. Разрывы в этих точках являются устранимыми, поскольку функция $D_n(0, z_{n0})$ вокруг них определена и равна нулю. Как и в случае круглого поршня, при $\Phi \to \infty$ дисперсионный параметр на оси сферически выпуклого излучателя с равномерным распределением амплитуды равен нулю.

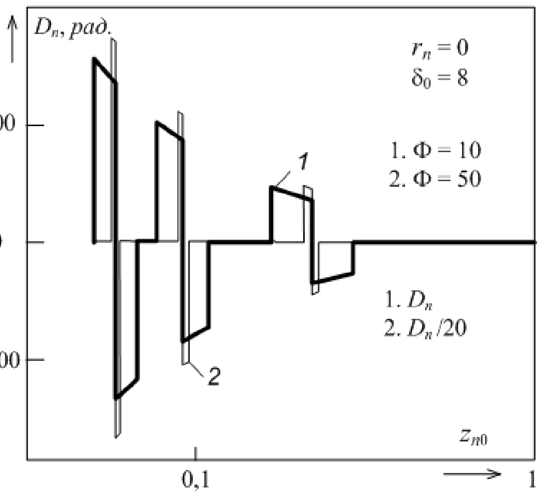


Рис. 7. Осевые распределения D_n при $\Phi = 10$ и $\Phi = 50$

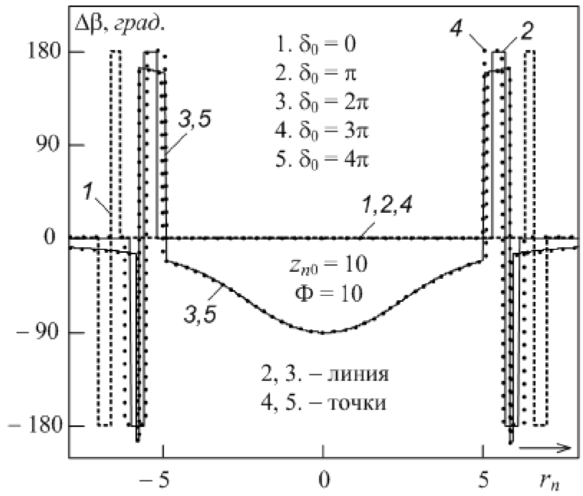


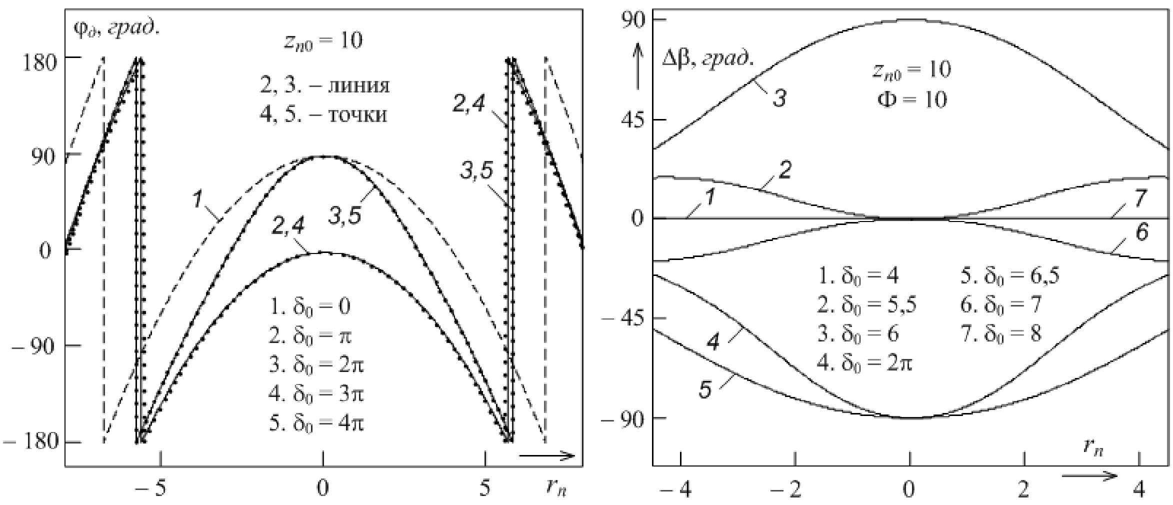
Рис. 8. Поперечные распределения фазового инварианта для $\delta_0 = \pi l$ и $z_{n0} = 10$

Для кривизны $\delta_0 = 2\pi l$ ($l = 1,\ 2,\ldots$) координата z_{n0k} согласно (25) устремляется в бесконечность при $l = k$. Постепенное преобразование ступенчатых участков в точечные разрывы, расположенные на расстояниях $z_{n0} = z_{n0k}$, показано на примере осевых распределений дисперсионного параметра с $\Phi = 10$ и $\Phi = 50$, рис. 7. При увеличении Φ одновременно с сокращением протяженности ступенчатых участков происходит рост абсолютных значений D_n.

5. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗОВОГО ИНВАРИАНТА И ДИСПЕРСИОННОГО ПАРАМЕТРА В ДАЛЬНЕЙ ОБЛАСТИ ПОЛЯ

На рис. 8 показаны поперечные распределения ФИ за пределами ближней области поля ($z_{n0} = 10$) для значений кривизны $\delta_0 = (2\pi,\ 4\pi)$ и $\delta_0 = (\pi,\ 3\pi)$, приводящих к качественно отличающейся структуре поля. Так, для первой группы величин δ_0 в приосевой области пучка формируется минимум амплитуды волны, во втором случае наоборот, максимум [22]. Зависимости $\Delta\beta(r_n)$ у поршня ($\delta_0 = 0$) и выпуклого излучателя с кривизной $\delta_0 = 2\pi l$ ($l = 1,\ 2,\ldots$) совпадают за исключением участков, прилегающих к разрывам в поперечных распределениях главного значения фазы монохроматической волны с частотой ω_0, рис. 9-а. При этом вид поперечных распределений амплитуды и фазы у этих излучателей различен [20, 22].

В дальней области поля зависимость поперечного распределения ФИ от кривизны излучателя наиболее сильно выражена вблизи значений $\delta_0 = 2\pi l$, что показано на примере $\delta_0 \le 2\pi$ и $\delta_0 \ge 2\pi$, рис. 9-б. Несмотря на то, что форма кривой $\Delta\beta(r_n)$ может под влиянием δ_0 меняться в широких пределах, на оси пучка ($r_n = 0$) величина $\Delta\beta$ принимает только одно из трех значений ($\pm\pi/2$; 0). Эта особенность отмечалась выше при анализе осевых распределений ФИ. В широком интервале значений кривизны, прилегающих к $\delta_0 = 0$ и $\delta_0 = (2l-1)\pi$, для ФИ справедливо равенство $\Delta\beta(r_n) = 0$, кривые 1 и 7.



а) б)

Рис. 9. Поперечные распределения дифракционного набега фазы для $\delta_0 = \pi l$ (а) и расстройки фазового инварианта при $\delta_0 \le 2\pi$ и $\delta_0 \ge 2\pi$ (б)

При рассмотрении дальней области ($z_n >> 1$) воспользуемся угловыми зависимостями параметров поля. Переход в (3) к угловой координате θ произведем посредством преобразования $r_n / z_n = A \operatorname{tg}\theta$:

$$P_n(\theta, z_n) = \frac{2i}{z_n} \int_0^1 \exp\left[-ir_{n0}^2 \frac{(1+\delta_0 z_n)}{z_n}\right] J_0(2r_{n0} A \operatorname{tg}\theta) r_{n0} dr_{n0} . \qquad (28)$$

где $A = ka/2$. При условии $z_n >> 1/\delta_0$ из (28) следует

$$P_n(\theta, z_n) = \frac{2i}{z_n} \int_0^1 \exp\left(-i\delta_0 r_{n0}^2\right) J_0(2r_{n0} A \operatorname{tg}\theta) r_{n0} dr_{n0} .$$

Расчет расстройки фазового инварианта проведем с использованием выражения

$$\Delta\beta(\theta, z_{n0}, \Phi) = 0{,}5\left[\arg P_{nH}(\theta, z_{n0}) + \arg P_{nB}(\theta, z_{n0})\right] - \arg P_{n0}(\theta, z_{n0}), \qquad (29)$$

где

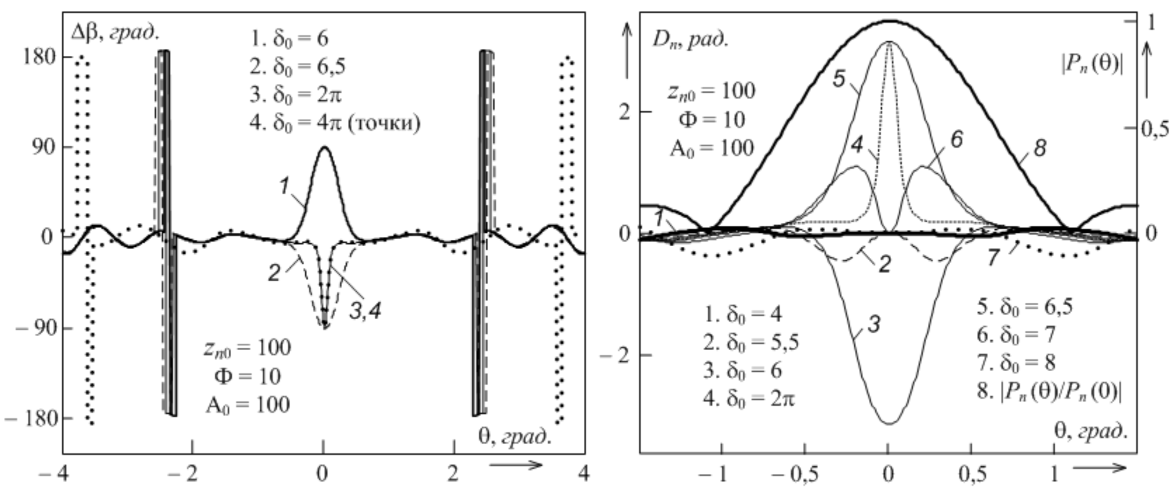
$$P_{n0}(\theta, z_{n0}) = \frac{2i}{z_{n0}} \int_0^1 \exp\left(-i\delta_0 r_{n0}^2\right) J_0(2r_{n0} A_0 \operatorname{tg}\theta) r_{n0} dr_{n0} ;$$

$$P_{nH}(\theta, z_{n0}) = \frac{2i(\Phi - 1)}{z_{n0}\Phi} \int_0^1 \exp\left(-i\delta_0 r_{n0}^2 \frac{\Phi - 1}{\Phi}\right) J_0\left(2 r_{n0} A_0 \frac{\Phi - 1}{\Phi} \operatorname{tg}\theta\right) r_{n0} dr_{n0} ;$$

$$P_{nB}(\theta, z_{n0}) = \frac{2i(\Phi + 1)}{z_{n0}\Phi} \int_0^1 \exp\left(-i\delta_0 r_{n0}^2 \frac{\Phi + 1}{\Phi}\right) J_0\left(2 r_{n0} A_0 \frac{\Phi + 1}{\Phi} \operatorname{tg}\theta\right) r_{n0} dr_{n0} ,$$

здесь $A_0 = k_0 a/2 = \omega_0 a/2c_0$. Пространственное распределение дисперсионного параметра находим подстановкой (29) в выражение $D_n(\theta, z_{n0}, \Phi) = -(2/z_{n0})\Phi^2 \Delta\beta(\theta, z_{n0}, \Phi)$.

На рис. 10 приведены угловые распределения ФИ и дисперсионного параметра, рассчитанные для $A_0 = 100$ и $\Phi = 10$. Зависимости $\Delta\beta(\theta)$ сохраняют особенности поведения поперечных распределений ФИ на рис. 8 и рис. 9-б. Это видно на примере изменений формы кривой в приосевой области пучка для $\delta_0 \le 2\pi$ и $\delta_0 \ge 2\pi$, а также совпадения в пределах углов главного лепестка амплитудной ХН кривых 3 и 4, относящихся к $\delta_0 = 2\pi$ и $\delta_0 = 4\pi$, рис. 10-а. Однако, с увеличением угла θ различия у этих кривых нарастают.



а) б)

Рис. 10. Угловые зависимости фазового инварианта и дисперсионного параметра

Динамика угловых распределений дисперсионного параметра при изменении кривизны вблизи $\delta_0 = 2\pi$ показана на рис. 10-б. Кривая 8 соответствует характеристике направленности поршня $|P_n(\theta)/P_n(0)|$ с волновым параметром $A_0 = 100$. Наиболее значимые изменения $D_n(\theta)$ в зависимости от δ_0 происходят в центральной части пучка. По мере того, как значение δ_0 удаляется от $\delta_0 = 2\pi l$, дисперсионный параметр стремится к нулю для всех углов θ, что имеет место в случае поршня ($\delta_0 = 0$) [20].

Специфика геометрической дисперсии выпуклого излучателя проявляется в возможности использования его кривизны для получения конечных значений дисперсионного параметра за пределами области дифракции Френеля. Небольшой перестройкой кривизны относительно $\delta_0 = 2\pi l$ достигается изменение абсолютного значения, а также смена знака дисперсионного параметра и формы его углового распределения. Быстрый рост абсолютных значений D_n при увеличении Ф происходит на фоне усиливающейся локализации углового распределения в приосевой области.

ВЫВОДЫ

На основе решения параболического уравнения дифракции рассмотрены дисперсионные свойства высокочастотных расходящихся пучков, создаваемых сферически выпуклыми излучателями с равномерным распределением амплитуды. Прослежено совместное влияние дифракции и геометрической расходимости на пространственные распределения дисперсионного параметра и расстройки фазового инварианта трехчастотной волны в ближней и дальней областях поля. Отмечены особые проявления геометрической дисперсии при значениях кривизны излучающей поверхности, кратной 2π. Показаны возможность и условия получения конечных значений дисперсионного параметра за пределами области дифракции. Установлена взаимосвязь между частотными соотношениями в спектре волнового пакета и пространственными распределениями дисперсионного параметра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука. 1990.
2. Гаврилов А. М., Ситников Р. О. Измерение геометрической дисперсии в звуковом пучке. Акуст. журн., 2006, т. 52, № 5, с. 641–647.
3. Гурбатов С. Н.. Малахов А. Н., Саичев А. И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 216 с.
4. Ультразвук. Маленькая энциклопедия. Под ред. И. П. Голяминой. М.: Советская энциклопедия. 1979. 400 с.
5. Горская Н. В., Иванов А. Н. Курин В. В., Морозова Н. И., Салин Б. М. Фазовые соотношения при распространении тригармонической волны в маломодовых акустических волноводах. Акуст. журн., 1985, т. 31, № 6, с. 796−799.
6. Вакс В. Л., Шейнфельд И. В. Измеритель фазового инварианта. Патент РФ №2062474, G01R 25/00. Опубл. 20.06.1996.
7. Чикин А. И., Шемагин В. А., Шейнфельд И. В. Способ измерения фазового инварианта тригармонического сигнала. Патент РФ № 1775680, G01R 23/16. Опубл. 15.11.1992. Бюл. № 42.
8. Зверев В. А. Люди и события. Воспоминания. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2004. 86 с.
9. Зверев В. А. Модуляционный метод измерения дисперсии ультразвука. ДАН СССР, 1953, т. 91, № 4, с. 791–794.
10. Зверев В. А. Модуляционный метод измерения дисперсии ультразвука. Акуст. журн., 1956, т. 2, № 2, с. 142–145.
11. Гаврилов А. М., Ситников Р. О. Экспериментальное исследование нелинейной дисперсии трехчастотного волнового пакета методом фигур Лиссажу. Сборник

трудов XVIII сессии Российского акустического общества, т. 1. – М.: ГЕОС, 2006, с. 119–123.
12. Гаврилов А. М., Ситников Р. О. Метод и результаты измерений геометрической дисперсии в звуковых пучках. Сборник трудов XVIII сессии Российского акустического общества, т. 2. – М.: ГЕОС, 2006, с. 5–8.
13. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука 1982. 174 с.
14. Андреев В. Г., Карабутов А. А., Руденко О. В. Экспериментальное исследование распространения нелинейных звуковых пучков в свободном пространстве. Акуст. журн., 1985, т. 31, № 4, с. 423–428.
15. Маков Ю. Н. Волноводное распространение звуковых пучков в нелинейной среде. Акуст. журн., 2000, т. 46, № 5, с. 680–684.
16. Пономарев А. Е., Смагин М. А., Булатицкий С. И., Сапожников О. А. Временное обращение волн в задачах компрессии импульсов и нестационарной акустической голографии. Акустика неоднородных сред. Ежегодник Российского акустического общества. М.: Тровант, 2005, с. 69–89.
17. Пономарев А. Е., Булатицкий С. И., Сапожников О. А. Компрессия и усиление ультразвукового импульса, отраженного от одномерной слоистой структуры. Акуст. журн., т. 53, № 2, 2007, с. 157–167.
18. Гостев В. С., Есипов И. Б., Попов О. Е., Воронин В. А., Тарасов С. П. Дисперсия сигнала параметрической антенны в мелком море. Акустика неоднородных сред. Ежегодник Российского акустического общества. М.: Тровант, 2006, с. 112–120.
19. Montaldo G., Roux P., Derode A., Negreira C., Fink M. Generation of very high-pressure pulse using time reversal in a solid waveguide: Application to lithotripsy. J. Acoust. Soc. Amer., 2001, v. 109, p. 2481.
20. Гаврилов А. М. Геометрическая дисперсия в звуковых пучках, создаваемых плоскими излучателями. //Акустика неоднородных сред. Ежегодник Российского акустического общества. Труды научной школы проф. С.А. Рыбака. Троицк: Тровант, 2007, вып.8, с. 86−102.
21. Гаврилов А. М. Геометрическая дисперсия в сферически расходящемся гауссовом пучке. Электронный журнал «Техническая акустика» <http://www.ejta.org> 2007, 23.
22. Гаврилов А. М. Особенности поля сферически выпуклого излучателя. Электронный журнал «Техническая акустика» <http://www.ejta.org> 2008, 3.