

М. А. Ильгамов, А. Г. Хакимов

*Институт механики УНЦ РАН, 450054, г. Уфа, пр. Октября, 71,  
e-mail: hakimov@anrb.ru*

## Отражение продольной бегущей волны от надреза в стержне

*Получена 01.10.2008, опубликована 14.10.2008*

Исследуется отражение от поперечного надреза и прохождение продольной волны, распространяющейся по бесконечному стержню. Получена зависимость отраженной волны от параметров надреза. Постановка обратной задачи позволяет определить координату надреза и параметр, содержащий его глубину и длину, по данным падающей и отраженной волн в месте наблюдения.

Ключевые слова: бесконечный стержень, надрез, продольная бегущая волна, отраженная волна, проходящая волна, диагностика.

### ВВЕДЕНИЕ

В протяженных объектах типа трубопроводных систем не все участки могут быть доступны для визуального осмотра и приборного диагностирования. Но и при доступности визуального осмотра не во всех случаях представляется возможным определение целостности конструкции. Здесь предлагается методика диагностирования стержней с помощью замеров параметров продольных бегущих волн. В случае стержней конечной длины для определения наличия его дефектов может быть использовано изменение спектра собственных изгибных или продольных колебаний [1–6]. В [2] дается решение задачи определения переменной площади поперечного сечения от продольной координаты по известной зависимости перемещения свободного конца стержня от частоты возмущающей силы. В статьях [3, 4] исследуются обратные задачи теории трещин в твердых телах. Решению обратных задач о продольных бегущих волнах в стержнях конечной длины посвящены работы [5, 6].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается установившийся процесс отражения от надреза и прохождения продольной бегущей волны, распространяющейся по бесконечному стержню площадью поперечного сечения  $F$ . В точке с координатой  $x_c$  стержень имеет надрез длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $f$  (рис. 1). Предполагается, что поперечный размер стержня и длина надреза  $l$  значительно меньше длины волны  $\lambda$ . Не учитывается пространственное напряженно-деформированное состояние в зоне надреза. Оно считается одноосным. В такой постановке определяются отраженная и проходящая

волны по известным параметрам надреза и его координате (прямая задача). Определение координат надреза и его размеров по отраженной волне в точке наблюдения представляет собой обратную задачу.

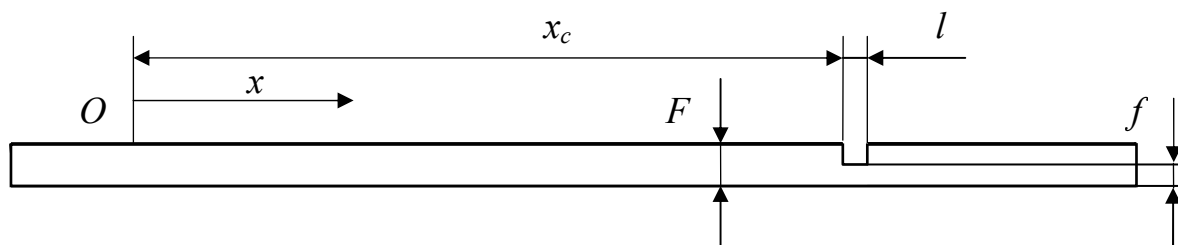


Рис. 1

Движение элемента стержня описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (1)$$

где  $u$  — продольные перемещения элементов стержня,  $a$  — скорость звука в стержне,  $E, \rho$  — модуль упругости и плотность материала стержня,  $x$  — продольная координата,  $t$  — время. Продольные перемещения, возбуждаемые источником, находящимся на расстоянии  $x = -\infty$ , задаются в виде бегущей волны в сторону возрастания координаты  $x$ .

$$u = U \sin(\omega t - \alpha x), \quad \alpha = \frac{\omega}{a}, \quad L = \frac{2\pi a}{\omega}, \quad (2)$$

где  $U, \omega$  — амплитуда и частота продольной бегущей волны,  $\alpha$  — волновое число. Решение уравнения (1) для области распространения отраженной волны имеет вид:

$$u_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha x) + B_1 \sin(\omega t + \alpha x), \quad -\infty \leq x \leq x_c, \quad 0 \leq t < \infty; \quad (3)$$

а для области распространения проходящей волны записывается:

$$u_2 = A_2 \cos(\omega t - \alpha x) + B_2 \sin(\omega t - \alpha x), \quad x_c \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (4)$$

Граничные условия в точке  $x = x_c$  [6]:

$$x = x_c, \quad \frac{\partial(U + u_1)}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad u_2 = U + u_1 + \frac{mL}{\pi} \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad (5)$$

где

$$m = \frac{\pi l F}{L f}.$$

## 2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Из условий (5) получаем

$$\begin{aligned} A_1 &= -D \frac{m\alpha L}{\pi} \left( \frac{m\alpha L}{\pi} \sin 2\alpha x_c - 2 \cos 2\alpha x_c \right), \\ B_1 &= D \frac{m\alpha L}{\pi} \left( \frac{m\alpha L}{\pi} \cos 2\alpha x_c + 2 \sin 2\alpha x_c \right), \\ A_2 &= -2D \frac{m\alpha L}{\pi}, \quad B_2 = 4D, \quad D = \frac{\pi^2 U}{(m\alpha L)^2 + 4\pi^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Перейдя к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{2\pi x}{L}, \quad \xi_c = \frac{2\pi x_c}{L}, \quad \tau = \omega t,$$

и учитывая  $\alpha L = 2\pi$ , падающую, отраженную и проходящую волны представим в виде

$$\begin{aligned} u &= U \sin(\tau - \xi), \\ u_1 &= \frac{mU}{m^2 + 1} \left[ (-m \sin 2\xi_c + \cos 2\xi_c) \cos(\tau + \xi) + (m \cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c) \sin(\tau + \xi) \right], \\ u_2 &= \frac{U}{m^2 + 1} \left[ -m \cos(\tau - \xi) + \sin(\tau - \xi) \right], \quad \xi_c \leq \xi \leq \infty, \quad 0 \leq \tau < \infty. \end{aligned}$$

Отраженную и проходящую волны можно представить также в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= k_1 U \sin(\tau + \xi - \varphi_0), \quad -\infty \leq \xi \leq \xi_c, \quad 0 \leq \tau < \infty, \\ \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{m \sin 2\xi_c - \cos 2\xi_c}{m \cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c}, \\ u_2 &= k_2 U \sin(\tau - \xi - \psi), \quad \operatorname{tg} \psi = m, \quad \xi_c \leq \xi \leq \infty, \quad 0 \leq \tau < \infty, \end{aligned}$$

где коэффициенты отражения  $k_1$  и прохождения  $k_2$  равны

$$k_1 = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}. \quad (7)$$

Угол сдвига фаз  $\varphi$  между падающей и отраженной волной определяется по формуле

$$\varphi = \varphi_0 - 2\xi. \quad (8)$$

При  $\xi = 0$  уравнение движения элемента стержня записывается как

$$u_1 = k_1 U \sin(\tau - \varphi_0), \quad 0 \leq \tau < \infty.$$

Угол сдвига фаз между падающей и проходящей волной равен

$$\psi = \arctg m. \quad (9)$$

Анализ формул (7)–(9) показывает, что коэффициенты отражения  $k_1$  и прохождения  $k_2$ , а также угол сдвига фаз  $\psi$  между падающей и проходящей волной зависят только

от параметра  $m$ . Угол сдвига фаз  $\varphi$  между падающей и отраженной волнами зависит как от параметра  $m$ , так и от положения надреза  $\xi_c$  и координаты  $\xi$  места проведения замеров. При  $m \rightarrow 0$  коэффициенты  $k_1 \rightarrow 0$ ,  $k_2 \rightarrow 1$ ,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\cos 2\xi_c}{\sin 2\xi_c} = \operatorname{tg} \left( 2\xi_c - \frac{\pi}{2} \right), \quad \varphi = 2\xi_c - \frac{\pi}{2}.$$

Суммарные перемещения  $V$  элемента стержня в точке наблюдения ( $\xi=0$ ) определяются по формуле

$$V = u + u_1 = U \sin \tau + \frac{mU}{m^2 + 1} \left[ (-m \sin 2\xi_c + \cos 2\xi_c) \cos \tau + (m \cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c) \sin \tau \right],$$

$$0 \leq \tau < \infty$$

или

$$V = CU \sin(\tau - \delta), \quad 0 \leq \tau < \infty,$$

$$C = \sqrt{\frac{2m^2(1 + \cos 2\xi_c) + 2m \sin 2\xi_c + 1}{1 + m^2}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{m \cdot (m \sin 2\xi_c - \cos 2\xi_c)}{m^2(1 + \cos 2\xi_c) + m \sin 2\xi_c + 1}, \quad (10)$$

где  $C$  — амплитуды суммарных относительных перемещений,  $\delta$  — угол сдвига фаз в суммарной волне.

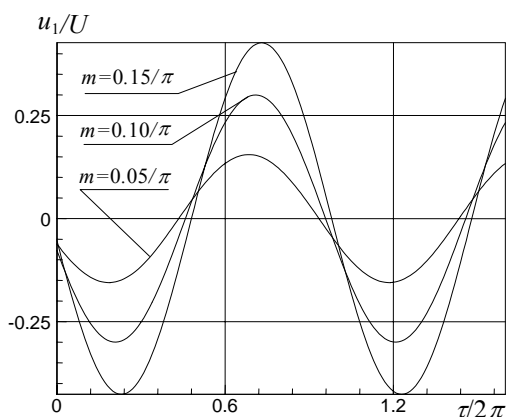


Рис. 2. Зависимость относительного перемещения элемента стержня при  $\xi=0$ ,  $\xi_c = 2\pi/3$  в отраженной волне от безразмерного времени  $\tau$

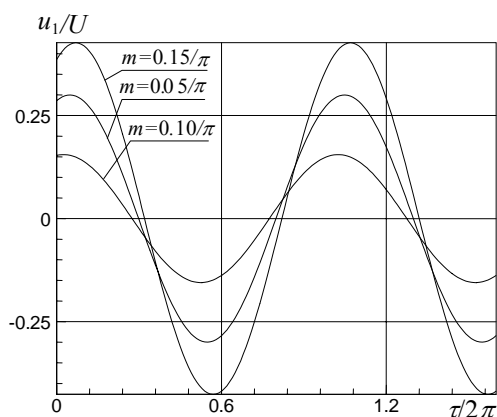


Рис. 3 Зависимость относительного перемещения элемента стержня при  $\xi=0$ ,  $\xi_c = 2\pi$  в отраженной волне от безразмерного времени  $\tau$

На рис. 2, 3 приводятся зависимости относительного перемещения элемента стержня при  $\xi=0$  в отраженной волне от безразмерного времени  $\tau$ . Видно, что отраженные волны зависят от величины и положения надреза в стержне. Чем больше  $m$ , тем больше величина сигнала в отраженной волне. С увеличением параметра  $m$  также увеличивается угол сдвига фаз в отраженной волне. С изменением расположения

надреза  $\xi_c$  также существенно изменяется угол сдвига фаз в отраженной волне. Для координат  $\xi_c = 1$  и  $\xi_c = 5$  кривые идентичны.

Зависимость коэффициента отражения  $k_1$  от параметра  $m$  приводится на рис. 4. Видна линейная зависимость коэффициента отражения от параметра  $m$  для его малых значений.

Зависимость угла сдвига фаз в отраженной волне от параметра  $m$  для различных значений  $\xi_c$  приводится на рис. 5. С ростом параметра  $m$  происходит увеличение угла сдвига фаз.

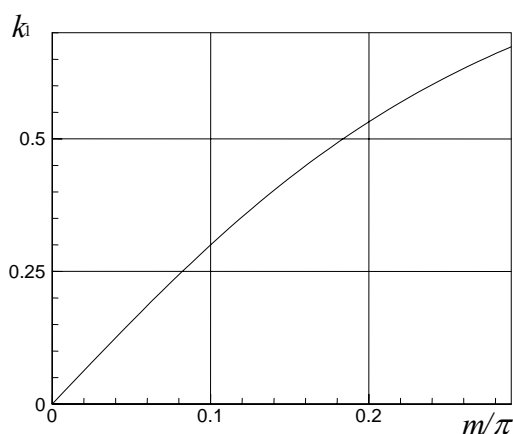


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения  $k_1$  от параметра  $m$

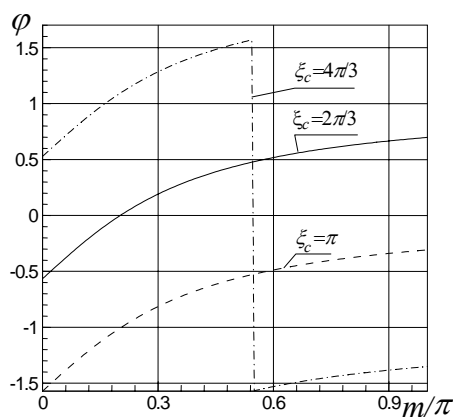


Рис. 5. Зависимость угла сдвига фаз в отраженной волне от  $m$

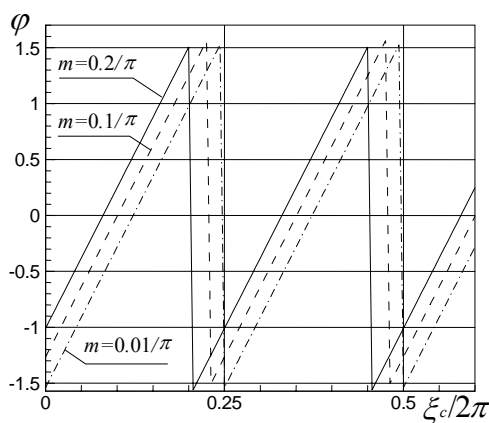


Рис. 6. Зависимость угла сдвига фаз в отраженной волне от  $\xi_c$

Зависимость угла сдвига фаз в отраженной волне от параметра  $\xi_c$  для различных значений  $m$  дается рис. 6. Видна периодическая зависимость угла сдвига фаз в отраженной волне от положения надреза.

### 3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Из соотношений (7)–(9) следует, что по известным коэффициентам отражения  $k_1$  и прохождения  $k_2$  можно определить параметр  $m$ :

$$m = \frac{k_1}{\sqrt{1-k_1^2}}, \quad m = \frac{\sqrt{1-k_2^2}}{k_2}. \quad (11)$$

Параметр  $m$  также определяется по углу сдвига фаз  $\psi$  между падающей и проходящей волнами:

$$m = \operatorname{tg} \psi. \quad (12)$$

Положение надреза  $\xi_c$  определяется по формуле

$$\xi_c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1 + m \operatorname{tg}(2\xi + \varphi)}{m - \operatorname{tg}(2\xi + \varphi)}. \quad (13)$$

Но данная функция многозначная, поэтому можно рекомендовать замеры угла сдвига фаз  $\varphi$  между падающей и отраженной волнами для двух значений  $\xi$ . Например, при  $\xi = 0$

$$\xi_c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1 + m \operatorname{tg} \varphi_0}{m - \operatorname{tg} \varphi_0}$$

и  $\xi = \xi_1$

$$\xi_c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1 + m \operatorname{tg}(2\xi_1 + \varphi_1)}{m - \operatorname{tg}(2\xi_1 + \varphi_1)}.$$

Выражение (10) для амплитуды суммарных относительных перемещений может быть представлено в виде

$$2m^2(1 + \cos 2\xi_c) - C^2(1 + m^2) + 2m \sin 2\xi_c + 1 = 0,$$

а из условия  $V(\tau_1) = 0$  имеем

$$\sin \tau_1 + \frac{m}{m^2 + 1} \left[ (-m \sin 2\xi_c + \cos 2\xi_c) \cos \tau_1 + (m \cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c) \sin \tau_1 \right] = 0.$$

Если значение амплитуды суммарных относительных перемещений  $C$  и величину  $\tau_1$  ( $\tau_1 = \delta$ ) определить в точке  $\xi = 0$  по показаниям прибора, то получим систему уравнений для определения параметра  $m$  и положения надреза  $\xi_c$

$$\begin{cases} 2m^2(1 + \cos 2\xi_c) - C^2(1 + m^2) + 2m \sin 2\xi_c + 1 = 0, \\ \sin \tau_1 + \frac{m}{m^2 + 1} \left[ (-m \sin 2\xi_c + \cos 2\xi_c) \cos \tau_1 + (m \cos 2\xi_c + \sin 2\xi_c) \sin \tau_1 \right] = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений громоздкое, поэтому здесь не приводится. Если параметр  $m$  определить из (11) или (12), то координата надреза  $\xi_c$  определяется по формуле

$$\xi_c = \frac{1}{2} \arctg \left\{ \left[ m^2 (C^2 - 2) + C^2 - 1 + \sqrt{m^2 C^2 (4 - C^2) + 2C^2 (3 - C^2) - \frac{(1 - C^2)^2}{m^2}} \right] (m^2 + 1)^{-1} \right\}.$$

Изменение параметра  $m$  и координаты надреза  $\xi_c$  от амплитуды  $C$  суммарных перемещений при  $\xi = 0$  приводится на рис. 7а и 7б для различных значений угла сдвига фаз в суммарной волне. А на рис. 7с и 7д даются зависимости этих же функций от угла сдвига фаз при  $\xi = 0$  для различных значений амплитуды суммарных перемещений. С ростом амплитуды суммарных перемещений при одном и том же значении угла сдвига фаз в суммарной волне происходит увеличение параметра  $m$  (рис. 7а) и увеличение координаты надреза  $\xi_c$  (рис. 7б). Таким образом, по замеренным значениям амплитуды  $C$  суммарных перемещений и угла сдвига фаз можно определить параметр  $m$  и координату надреза  $\xi_c$ .

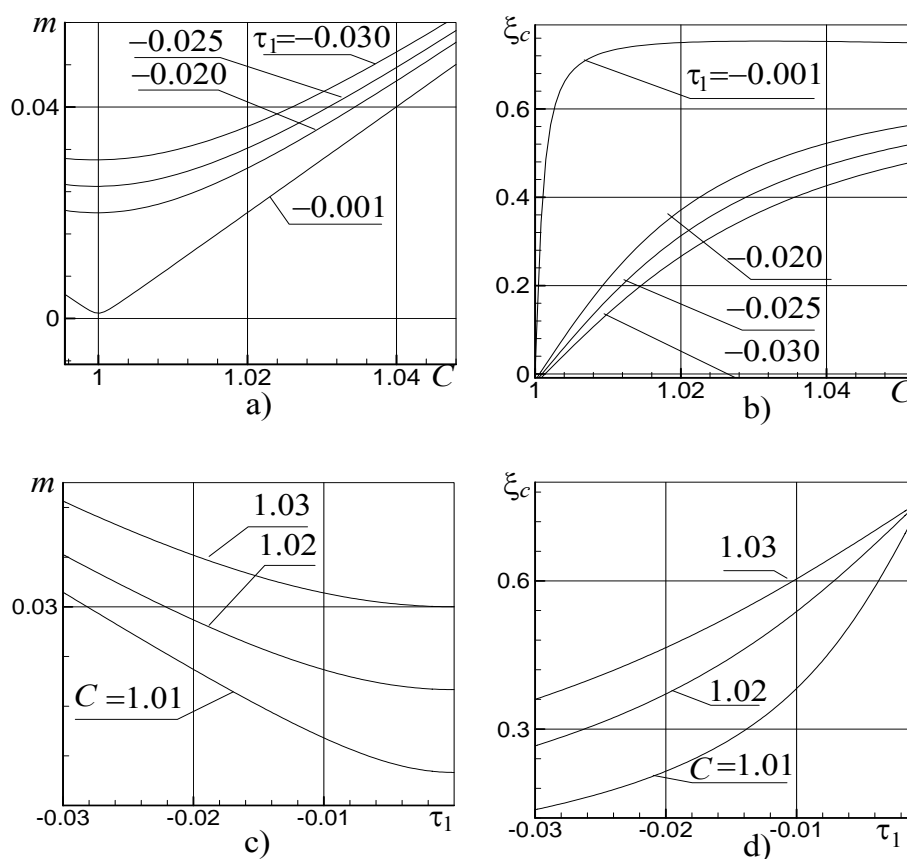


Рис. 7.

- а) зависимость параметра  $m$  от амплитуды  $C$  суммарных перемещений при  $\xi = 0$ ;
- б) зависимость координаты надреза  $\xi_c$  от амплитуды  $C$  суммарных при  $\xi = 0$ ;
- в) зависимость параметра  $m$  от угла сдвига фаз в суммарной волне при  $\xi = 0$ ;
- г) зависимость координаты надреза  $\xi_c$  от угла сдвига фаз в суммарной волне при  $\xi = 0$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ отраженных и суммарных волн позволяет сделать вывод о том, что амплитуда и угол сдвига фаз зависят от величины и положения надреза на стержне.

Следует отметить, чем больше параметр  $m$ , тем больше угол сдвига фаз в отраженной волне при одном и том же  $\xi_c$ .

Получена линейная зависимость коэффициента отражения от величины надреза. Данная методика может быть применена для разработки прибора для диагностики длинных стержневых систем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ваньков Ю. В., Казаков Р. Б., Яковлева Э. Р. Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2003, 5.
2. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007, 224 с.
3. Ватульян А. О., Соловьев А. Н. О реконструкции плоских трещин в анизотропном упругом теле // ПММ, 2005, №3, с. 552–561.
4. Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Обратные задачи теории трещин в твердых телах // Изв. Вузов Сев.-Кавк. Рег.: Спецвыпуск «Математика и механика сплошной среды», 2004, с. 74–80.
5. Ватульян А. О., Солуянов Н. О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия, 2005, №9, с. 44–56.
6. Ильгамов М. А. Диагностика повреждений вертикальной штанги. Труды института механики УНЦ РАН, Уфа: «Гилем», 2007, вып. 5, с. 201–211.