Электронный журнал «Техническая акустика»
http://www.ejta.org.

2008, 21

Х. Б. Толипов

Южно-Уральский Государственный Университет,
ЮУрГУ, 4540080, Россия, Челябинск, пр. Ленина, 76, e-mail: thb@susu.ac.ru

К расчету дифракции рэлеевских волн в остроугольном клине

Получена 25.11.2008, опубликована 12.12.2008

Контроль изделий сложной формы особенно затрудняется, когда они имеют клиновидную форму. В этом случае для успешного проведения ультразвукового контроля необходимо знать характер движения волн в угловых областях контролируемого изделия. До настоящего времени вопрос описания распространения волн в этих областях остается актуальным. В данном сообщении классическими методами построено решение задачи формирования акустического поля в клине малого угла раскрытия, по одной из поверхностей которого движется волна Рэлея. Полученные выражения описывают пространственные структуры дифрагированных волн, согласующиеся с известными измерениями.

Ключевые слова: ультразвуковой контроль, дифракция, остроугольный клин, акустическое поле.

ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие рэлеевских неоднородных волн с наклонной плоскостью представляет собой интересное явление, объяснение которого до сих пор остается открытым. Как показали первые экспериментальные наблюдения [1], проведенные полвека назад, угловые зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения поверхностных волн имеют сложный осциллирующий характер. В теоретическом плане точное решение задачи получено только для больших углов клина ($\alpha > 90°$), когда пространственная структура акустического поля, набегающего на его ребро, остается неизменной [2, 3]. При малых углах под влиянием второй грани клина происходит изменение структуры падающего на ребро клина поля, что ведет к более сложной картине акустического поля. Как будет показано ниже, основным моментом при решении этой задачи является учет физических особенностей акустического поля, возникающих при распространении волны в клине.

1. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Полное волновое поле в клине представляет собой суперпозицию четырех волн: 1) падающей поверхностной, 2) отраженной от ребра клина, 3) прошедшей на вторую грань клина, 4) трансформированных объемных.

Эволюция структуры падающей волны Рэлея при движении из бесконечности к ребру клина рассмотрена в [4]. Как показали теоретические исследования, при приближении к ребру волна разделяется на две составляющие: антисимметричную и симметричную моды (рис. 1).

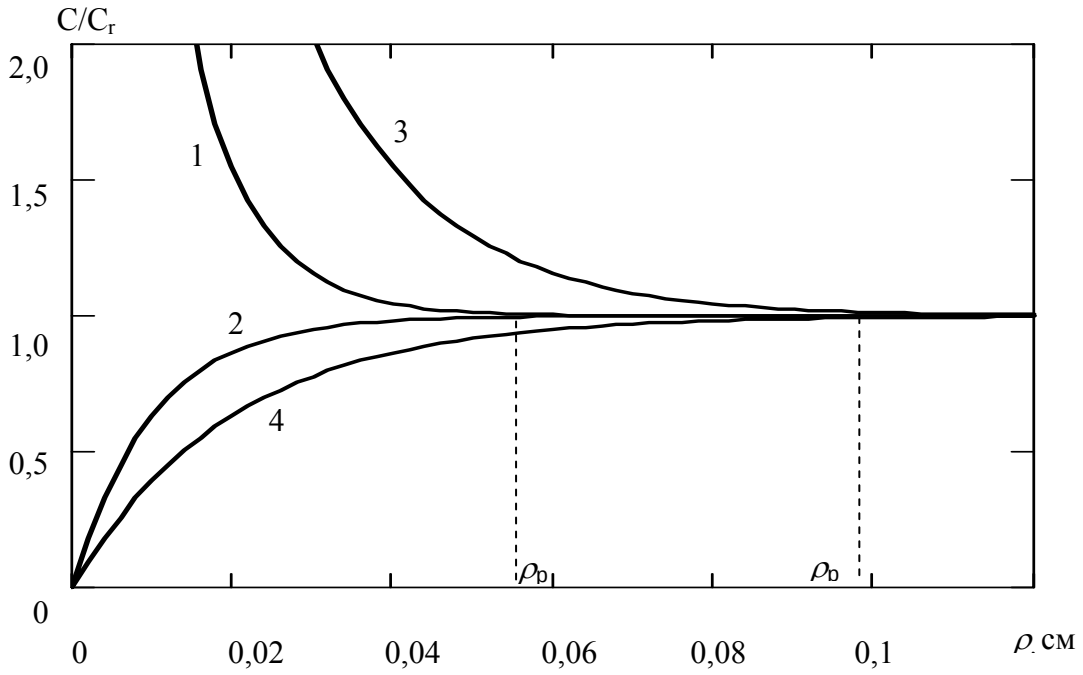

Рис. 1. Динамика изменения скорости рэлеевской волны при приближении к ребру для углов клина $\alpha_1 = 20°$ (кривые 1, 2), и $\alpha_2 = 10°$ (кривые 3, 4), ρ — расстояние до ребра

Известно, что при распространении в упругих средах скорость ультразвуковой волны остается неизменной. В клиновидной пластине она монотонно изменяется: скорость симметричной моды растет при приближении к ребру до скорости продольной волны, а скорость антисимметричной падает до нуля.

Характер распространения волн в клиновидной пластине отличается от плоскопараллельной: волны, смещения частиц в которых антисимметричны относительно плоскости симметрии клина, доходят до его ребра. Волны другого типа не достигают кромки клина, а проходят только до определенного расстояния до ребра, образуя «пробку». Размеры области («пробки»), куда не проникают продольные колебания, существенно зависит от угла клина.

Расчет показывает, что перестройка унимодальной в бимодальную структуру происходит при определенном критическом расстоянии от ребра клина, равном протяженности «пробки»:

$$\ell = 1{,}9\ /\rho\alpha(мм). \qquad (1)$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ПЕРВОЙ ГРАНИ КЛИНА

Акустическое поле на первой грани клина определяется падающей и отраженной от ребра волнами. При приближении к ребру в точке ρ_p (рис. 1) происходит перестройка падающей унимодальной поверхностной волны в бимодальную, состоящей из антисимметричной и симметричной мод. Антисимметричная мода отражается от кромки клина, а симметричная мода отражается на определенном расстоянии от его кромки. Скорости этих мод по мере движения приближаются к скорости рэлеевской волны, и на границе пробки формируется отраженная рэлеевская волна, представляющая сумму продольной и поперечной колебаний [1]:

$$U_r = U_\ell + U_t. \tag{2}$$

Напомним также, что составляющие рэлеевской волны связаны между собой и сдвинуты на 90° (рис. 2).

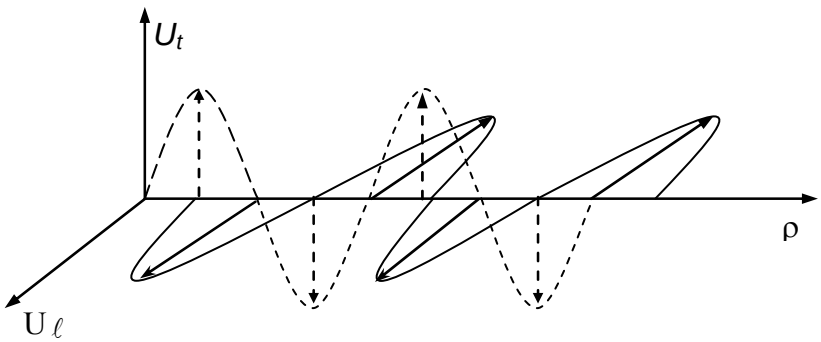

Рис. 2. Смещения в волне Рэлея

По мере движения происходит последовательное взаимное перекачивание энергии одной составляющей волны в другую. Поэтому эти составляющие являются двумя сторонами одной рэлеевской волны, подобно тому, как электрическое и магнитное поля являются составляющими единого электромагнитного поля.

Поскольку антисимметричная и симметричная моды при отражениях проходят различные расстояния, то амплитуда рэлеевской волны при их наложении определится сдвигом фаз между ними:

$$U_r = \sqrt{\left(U_s^2 + U_a^2 + 2U_s U_a \cos(\delta\varphi)\right)}. \tag{3}$$

Для удобства дальнейших расчетов изменения скорости симметричной $V_s(\rho)$ и антисимметричной $V_a(\rho)$ мод рассчитанные теоретические кривые аппроксимируем зависимостями:

$$V_a(\rho) = 1 - \exp(-2\rho),\ \ V_s(\rho) = \exp(\rho - 0.76)^{-2.5}, \tag{4}$$

и тогда разность фаз между интерферирующими волнами определится как:

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\left(2\int\frac{d\rho}{V_a(\rho)} - 2\int\frac{d\rho}{V_s(\rho)}\right). \quad (5)$$

Результаты численного моделирования зависимостей модуля коэффициента отражения волны Рэлея приведена на рис. 3 (экспериментальные точки из [1]).

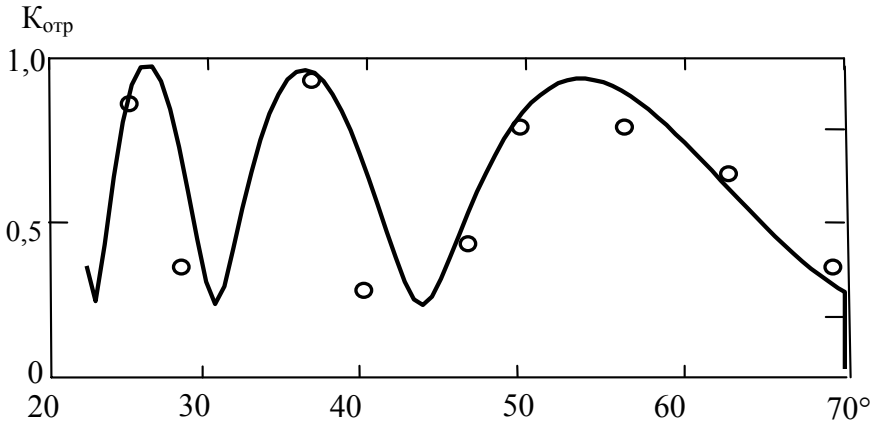

Рис. 3. Угловая зависимость модуля коэффициента отражения рэлеевской волны на первой грани клина

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ВТОРОЙ ГРАНИ КЛИНА

Поверхностная волна U_1, распространяясь по одной грани клина, вызовет неоднородное возмущение части поверхности на другой грани, которое будет являться источником волн U_2 на второй грани клина (рис. 4). Образовавшиеся волны Рэлея при отражении будут определять акустическое поле на этой грани клина.

Определим вначале амплитуду возникающих на противоположной грани поверхностных волн.

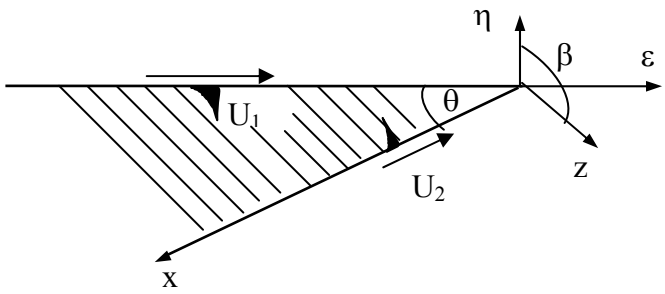

Рис. 4. Система координат

Неоднородное возмущение части поверхности можно представить математически в виде пространственных гармоник Фурье. Распространяющимися будут те волны, у которых, $k \le k_r$, где k_r — волновое число рэлеевской волны. Гармоники с $k > k_r$ создают вблизи ребра «ближнее акустическое поле» волн с быстро затухающими по мере распространения амплитудами смещений. Гармоники с $k = k_r$ создадут поле рэлеевских волн, а с $k < k_t$, — поле рассеиваемых в глубь среды объемных волн с азимутальным распределением амплитуд смещений. Вторичные волны вызовут в свою очередь возмущение части поверхности на первой грани клина и т. д. Следует отметить, что амплитуда возмущений с каждым отражением будет уменьшаться, т.к. возникающие объемные волны будут уносить энергию от ребра клина.

Таким образом, при отражении рэлеевских волн от поверхности противоположной грани клина последовательно возникают волны на одной и на другой грани клина.

Определим амплитуду смещений на второй грани клина при однократном отражении. Решение должно удовлетворять стандартным уравнениям акустики для изотропного твердого тела:

$$\Delta U_\ell + k_\ell^2 U_\ell = 0,$$
$$\Delta U_t + k_t^2 U_t = 0, \tag{6}$$

с граничными условиями при $z = 0$:

$$\mu\left(\frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z}\right) = -\sigma_{xz}^0,$$
$$2\mu\frac{\partial U_z}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z}\right) = -\sigma_{zz}^0, \tag{7}$$

Здесь $k_\ell = \omega / c_\ell, k_t = \omega / c_t$, c_ℓ, c_t — волновые числа и скорости распространения, соответственно, продольных и поперечных волн, ω — круговая частота, σ_{xz}^0 и σ_{zz}^0 — напряжения, вызываемые смещениями исходной рэлеевской волной на поверхности второй грани клина, λ, μ — постоянные Ламэ.

Таким образом, система уравнений (6) с граничными условиями (7) полностью описывает пространственную структуру поля на второй грани клина. Влиянием ребра клина на рассеянное поле и многократными отражениями от его кромки пренебрегаем. Как будет показано ниже, удовлетворительное совпадение экспериментальных и теоретических кривых свидетельствует о правомерности принятого допущения.

Применяя преобразования Фурье, получим в явном виде выражения для потенциалов:

$$\Phi = \left[\frac{A(\beta)S(k_r) + B(\beta)Q(k_r)}{D(k_r)}\right]\cos(\beta)\exp(iq_r z - ik_r x) + \\ + \left[\frac{C(\beta)R(k_r) + D(\beta)P(k_r)}{D(k_r)}\right]\sin(\beta)\exp(s_r z - ik_r x + i0.5\pi), \quad (8)$$

$$\Psi = \left\{\frac{A(\beta)R(k_r) + B(\beta)P(k_r)}{D(k_r)}\right\}\cos(\beta)\exp(iq_r z - ik_r x) + \\ + \left\{\frac{C(\beta)R(k_r) + D(\beta)P(k_r)}{D(k_r)}\right\}\sin(\beta)\exp(s_r z - ik_r x + i0.5\pi), \quad (9)$$

где:

$$A(\beta) = \left[\frac{P(k_{1x})}{k_r - k_{1x}} - p\frac{Q(k_{2x})}{k_r - k_{2x}}\right], B(\beta) = \left[\frac{R(k_{1x})}{k_r - k_{1x}} - p\frac{S(k_{2x})}{k_r - k_{2x}}\right],$$

$$C(\beta) = \left[\frac{P(k_{1x\backslash z})}{k_r - k_{1z}} + p\frac{Q(k_{2z})}{k_r - k_{2z}}\right], D(\beta) = \left[\frac{R(k_{1z})}{k_r - k_{1z}} + p\frac{S(k_{2z})}{k_r - k_{2z}}\right],$$

$$D(k_r) = -8k_r qs + 4k_r^3\left(\frac{q_r}{s_r} + \frac{s_r}{q_r}\right) - 8k_r\left(2k_r^2 - k_t^2\right),$$

$$q_r = \sqrt{k_r^2 - k_\ell^2},\ s_r = \sqrt{k_r^2 - k_t^2},$$

$$k_{1x}(\theta) = k_r\cos\theta + q_r\sin\theta,\ k_{1z}(\theta) = k_r\cos\theta + s_r\sin\theta,$$

$$k_{2x}(\theta) = k_r\sin\theta + q_r\cos\theta,\ k_{2z}(\theta) = k_r\sin\theta + s_r\cos\theta.$$

На рис. 5 представлены расчетные (для образца из алюминия) зависимости модуля коэффициента прохождения рэлеевской волны на вторую грань от угла клина.

При угле клина 55° амплитуда смещений рэлеевской волны принимает минимальное значение, что свидетельствует о наибольшей трансформации поверхностной волны в объемные. Также отметим, что при значениях угла клина меньших 25° проекция на вторую грань клина волнового вектора k падающей на ребро волны больше векторов сдвиговой k_t и продольной k_ℓ волн, но меньше рэлеевской $k_\ell < k_t < k \le k_r$. Скорость волновых возмущений на поверхности при этом меньше фазовых скоростей сдвиговой и продольных волн в среде, но больше скорости поверхностной волны Рэлея.

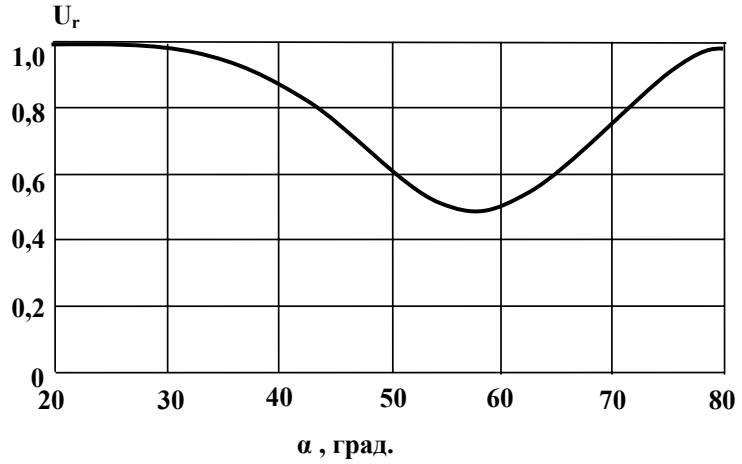

Рис. 5. Картина смещений возбужденной на противоположной грани волны Рэлея при различных углах клина

Однако, при распространении волны, движущейся вдоль поверхности и состоящей из сдвиговых и продольных составляющих, происходит последовательная взаимная трансформация продольных волн в сдвиговые и энергия волны будет монотонно падать, т.к. сдвиговая волна движется медленнее продольной. Это приводит также к монотонному уменьшению скорости движения до тех пор, пока скорости продольной и сдвиговой составляющих не выровняются соответственно до скорости рэлеевской волны. Объемная волна в этом случае не формируется. Этот эффект является специфическим в твердых телах и не имеет аналогов в других средах.

При приближении к ребру клина симметричная часть волны также отражается на определенном расстоянии от ребра и, складываясь с антисимметричной, отраженной от ребра, создает акустическое поле на второй грани клина.

Следовательно, волну Рэлея, сформированную на второй грани клина, можно представить тоже как результат суперпозиции колебаний:

$$U_{rp} = \sqrt{\left(U_s^2 + U_a^2 + 2U_s U_a \cos(\delta\varphi)\right)}. \qquad (10)$$

Применяя вышепредложенную методику расчета, можно определить поле на второй грани клина.

Зависимость нормированной амплитуды смещений в отраженной рэлеевской волне на этой грани клина приведена на рис. 6 (экспериментальные точки из [1]).

Отметим, что с уменьшением угла клина падает период осцилляций, связанный с более быстрым при отражении изменением разности фаз между двумя модами вблизи ребра.

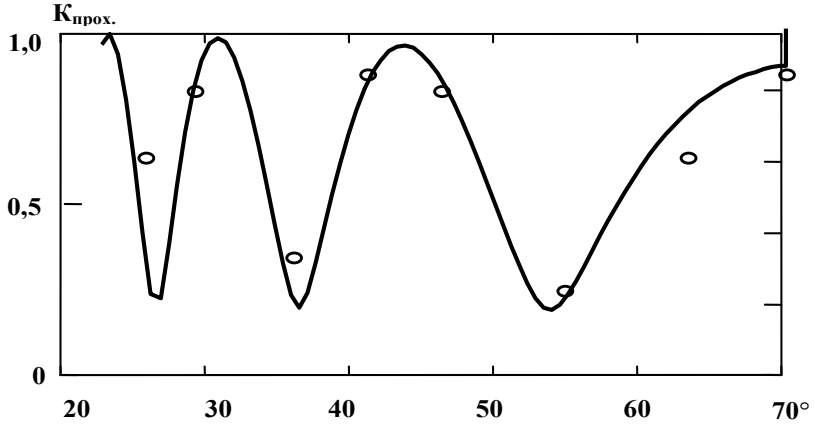

Рис. 6. Угловая зависимость модуля коэффициента отражения рэлеевской волны на второй грани клина

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ТРАНСФОРМИРОВАННЫХ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН

Применение метода перевала к интегральному представлению решения приводит к аналитическим выражениям для определения амплитуд расходящихся объемных волн: продольных:

$$U_\ell^s = \frac{\cos^2\gamma}{k_\ell^3 D_\ell}\left[\left(p\frac{2k_{2x}^2-k_t^2}{k_\ell\sin\gamma-k_{2x}}-\frac{2k_{1x}\sqrt{k_\ell^2-k_{1x}^2}}{k_\ell\sin\gamma-k_{1x}}\right)2k_r\sqrt{k_r^2-k_t^2}+\right.$$
$$\left.+\left(p\frac{2k_{2x}\sqrt{k_t^2-k_{2x}^2}}{k_\ell\sin\gamma-k_{2x}}+\frac{2k_{1x}^2-k_t^2}{k_\ell\sin\gamma-k_{1x}}\right)\left(2k_r^2-k_t^2\right)\right], \tag{11}$$

и сдвиговых:

$$U_t^s = \frac{\cos^2\gamma}{k_\ell^3 D_t}\left[\left(p\frac{2k_{2x}^2-k_t^2}{k_t\sin\gamma-k_{2x}}-\frac{2k_{1x}\sqrt{k_\ell^2-k_{1x}^2}}{k_t\sin\gamma-k_{1x}}\right)2k_r\sqrt{k_r^2-k_t^2}+\right.$$
$$\left.+\left(p\frac{2k_{2x}\sqrt{k_t^2-k_{2x}^2}}{k_\ell\sin\gamma-k_{2x}}+\frac{2k_{1x}^2-k_t^2}{k_\ell\sin\gamma-k_{1x}}\right)\left(2k_r^2-k_t^2\right)\right], \tag{12}$$

где:

$$D_\ell = 4\sin^2\gamma\cos^2\gamma\sqrt{\sin^2\gamma-\varepsilon^2}-(2\sin^2\gamma-1)^2,$$
$$D_t = 4\sin^2\gamma\cos^2\gamma\sqrt{\sin^2\gamma-\varepsilon^2}-(2\sin^2\gamma-\varepsilon^2)^2,$$

$\varepsilon = c_\ell / c_t$ γ – азимутальный угол, отсчитываемый от оси z.

На рис. 7 представлены расчетные (для образца из алюминия) зависимости амплитуд смещений в продольных и сдвиговых волнах.

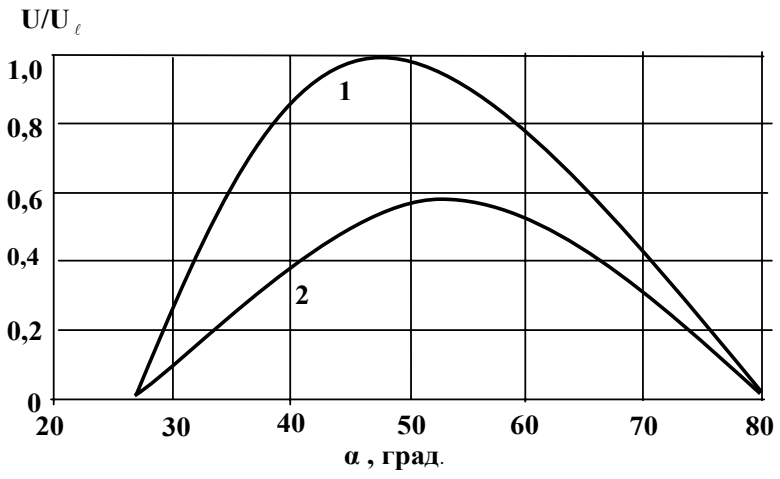

Рис. 7. Картина поля объемных сдвиговой и продольной волн

Из энергетических соображений следует, что уменьшение амплитуды рэлеевской волны, возбуждаемой на второй грани клина, связано с трансформацией объемных волн. Это утверждение согласуется с рассчитанной угловой зависимостью амплитуд смещений в объемных волнах – минимумы амплитуд смещений волн Рэлея (рис. 5) соответствуют максимумам амплитуд объемных волн (рис. 7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном сообщении были рассмотрены физические аспекты возникновения поля поверхностных и объемных волн, вызываемых неоднородной волной на наклонной плоскости. Однако полученные формулы, правильно описывая это явление, содержат и другую полезную информацию. Исследование дифракции поверхностных волн выявило интересные эффекты, позволившие глубже понять свойства неоднородных рэлеевских волн и наблюдать их новые проявления.

Отметим также, что анализ полученных кривых показывает, что предложенная физическая модель, описывающая эволюцию амплитуд колебаний поверхностной волны при малых углах клина, соответствует наблюдаемой динамике движений волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука. 1966.
2. Гуревич С. Ю., Толипов Х. Б. Особенности дифракции поверхностных волн на ребре клина. ПМТФ, 2003, т. 44, №5, 162–167.
3. Толипов Х. Б., Гуревич С.Ю. К вопросу о рассеянии рэлеевской волны на изломе поверхности // Электронный журнал «Техническая акустика» <http://www.ejta.org> 2005, 20.
4. Толипов Х. Б. Двумерная задача распространения акустических колебаний в клине // ММ.– Т. 15.– №10.– 2003. – С. 105–108.