Электронный журнал «Техническая акустика»
http://www.ejta.org

2009, 12

А. М. Ахтямов, А. Р. Аюпова

Институт механики УНЦ РАН, 450054, г.Уфа, пр.Октября, 71,
e-mail: AkhtyamovAM@mail.ru,
ГОУ ВПО НФ БашГУ, г.Нефтекамск, ул Социалистическая, 65,
e-mail: aigul9@yandex.ru

О решении обратной задачи по восстановлению сосредоточенных масс по собственным частотам изгибных колебаний

Получена 30.08.2009, опубликована 12.10.2009

В статье рассматривается метод решения обратной задачи, касающейся восстановления и оценки физических свойств механических систем по известным спектральным данным. В частности, описывается метод, с помощью которого можно судить о величине сосредоточенной массы в системе с одной степенью свободы по собственной частоте изгибных колебаний.

Ключевые слова: неразрушающий контроль, собственные частоты, сосредоточенные массы.

ВВЕДЕНИЕ

Механические системы, которые упрощенно можно представить как балки с сосредоточенными массами, являются составной частью многих технических конструкций, находящих широкое применение в различных областях деятельности человека. Известно, что сосредоточенные массы со временем могут менять свои значения в связи с изношенностью. Поэтому определение масс важно для проверки надежности работы механической системы.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в работе [1], где были найдены две сосредоточенные массы по двум собственным частотам. В [1] при рассмотрении колебаний системы массой самой системы пренебрегали. Сделанные допущения позволяют с достаточной для практики точностью решать ряд технических задач, особенно в тех случаях, когда масса системы мала по сравнению с приложенной к системе нагрузкой. Однако имеется ряд случаев, когда неучет массы системы сильно отражается на точности расчета. Вследствие чего необходимо использовать метод определения физических характеристик уже с учетом массы самой системы. В отличие от работы [1] здесь восстанавливается одна сосредоточенная масса.

1. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть балка массы M и длины l нагружена сосредоточенной массой m_1. Эта масса располагается от левого конца балки на расстоянии x. Оба конца балки шарнирно оперты. Известно значение частоты p малых изгибных колебаний. Необходимо восстановить значение сосредоточенной массы m_1.

Известно следующее уравнение, которое определяет форму изгибных колебаний стержня:

$$y^{(4)} = \lambda y, \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{mp^2}{EJ}}, \tag{1}$$

где m — интенсивность массы балки (масса единицы длины), EJ — изгибная жесткость сечения балки, p — частота.

Рассмотрим малые изгибные колебания, т. е. малые отклонения нагруженных точек балки. Формы колебаний стержня на двух участках будут:

$$y_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3 + c_{14}z_4,$$

$$y_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3 + c_{24}z_4,$$

где z_1, z_2, z_3, z_4 — фундаментальная система решений:

$$\begin{aligned} z_1(\lambda, x) &= \frac{\cos(\lambda x) + \cosh(\lambda x)}{2}, \\ z_2(\lambda, x) &= \frac{\sin(\lambda x) + \sinh(\lambda x)}{2\lambda}, \\ z_3(\lambda, x) &= \frac{-\cos(\lambda x) + \cosh(\lambda x)}{2\lambda^2}, \\ z_4(\lambda, x) &= \frac{-\sin(\lambda x) + \sinh(\lambda x)}{2\lambda^3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Для каждого конца стержня необходимо указать два граничных условия:

$$y(0) = 0, \; y''(0) = 0, \; y(l) = 0, \; y''(l) = 0 \tag{3}$$

К ним добавляются условия сопряжения участков балок с сосредоточенными массами [2]:

$$y_- = y_+, \; y'_- = y'_+, \; (EJy'')_- = (EJy'')_+, \; (EJy''')_- = (EJy''')_+ - m_s p^2 y, \; s=1, 2. \tag{4}$$

Развернутая запись условий (3–4) через функции Крылова (2) приведет к 8 однородным уравнениям относительно постоянных c_{ij}, где $i = 1, 2;\; j = 1, 2, 3, 4$. Чтобы эти постоянные не равнялись нулю одновременно, нужно чтобы равнялся нулю определитель, составленный из коэффициентов системы. Раскрывая данный определитель, получим частотное уравнение. Если значение частоты p известно, то масса найдется из полученного уравнения однозначно.

2. ПРИМЕРЫ

Применение найденного метода рассмотрим на примерах. Необходимые массы найдем с учетом и без учета массы самой системы.

2.1. Пример 1

Подмоторный брус прямоугольного сечения, с моментом инерции $I = 210$ см^4, весом 11 кг на погонный метр, длиною в 200 см нагружен посередине реакцией в 600 кг. Круговая частота $p = 63.6\,\text{с}^{-1}$. По данному значению частоты восстановим массу колеса.

2.1.1. Решение без учета массы

Согласно методу, описанному в [1] , массу можно найти из формулы

$$m_1 = \frac{1}{a_{11} p^2},$$

тогда $m_1 = \dfrac{1}{0.0004 \cdot 63.6^2} = 0.6229$.

2.1.2. Решение с учетом массы

Подставим известные значения p в частотное уравнение

$$-0.2692 \cdot 10^{14} m_1 + 0.16477 \cdot 10^{14} = 0,$$

тогда $m_1 = 0.6100$.

Масса колеса по условию задачи равна

$$\frac{600}{g} = \frac{600}{981} = 0.6116.$$

Получаем расхождение в 1,8% .

2.2. Пример 2

Подкрановая балка, выполненная из швеллера №30, весом 49 кг/м, с моментом инерции 8360 см^4, длиной 1000 см нагружена давлением колеса в 700 кг посередине. Круговая частота $p = 28.9\,\text{с}^{-1}$. По данному значению частоты восстановим массу колеса.

2.2.1. Решение без учета массы

В данном случае получим $m_1 = \dfrac{1}{0.001 \cdot 28.9^2} = 0.9609$.

2.2.2. Решение с учетом массы

Подставим известные значения p в частотное уравнение

$$-1.7033\cdot 10^{16} m_1 + 1.2159\cdot 10^{16} = 0,$$

тогда m_1=0.71.

Масса колеса по условию задачи равна

$$\frac{700}{g} = \frac{700}{981} = 0.7138.$$

Получаем расхождение в 35% , что является весьма существенным и обязательно должно быть учтено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод позволяет определять, с целью диагностики, неизвестные массы по набору собственных частот. Задача решена с учетом массы самой системы. На примерах показано, что точность оценок может быть значительно повышена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахтямов А. М. Диагностирование нагруженности механической системы. Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика, №6, 2003, с. 51–52.
2. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. Т. 3 / Под. ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968, 294 с.