Электронный журнал «Техническая акустика»
http://www.ejta.org
2010, 3

А. М. Ахтямов[1], А. Р. Каримов[2]

[1]*Институт механики УНЦ РАН, 450054, г. Уфа, пр. Октября, 71,*
e-mail: AkhtyamovAM@mail.ru
[2]*ГОУ ВПО БашГУ, 450075, г. Уфа, ул. Фрунзе, 32, e-mail: Azat7777@list.ru*

Диагностирование местоположения трещины в стержне по собственным частотам продольных колебаний

Получена 28.12.2009, опубликована 03.03.2010

В статье предлагается метод, позволяющий вычислить местоположение трещины в стержне по собственным частотам продольных колебаний. Рассматриваются случаи упругого закрепления и заделки левого конца стержня. Первый случай моделируется механической системой с двумя степенями свободы, а второй — с одной. Трещина моделируется пружиной.

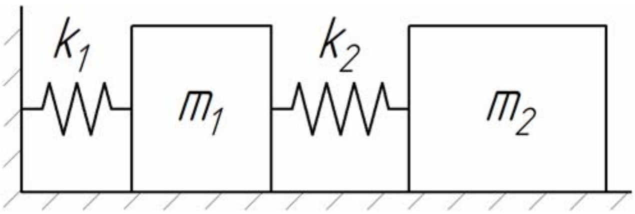
Ключевые слова: вибродиагностика, стержень, трещина, собственные частоты.

ВВЕДЕНИЕ

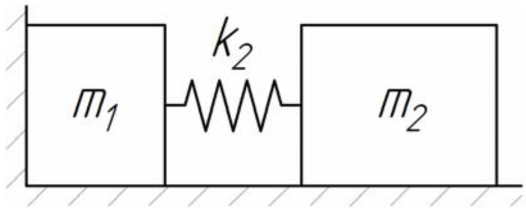
В настоящее время получило широкое развитие направление, называемое вибродиагностикой. Оно позволяет судить о состоянии какой-либо недоступной для визуального осмотра части механической установки сложной структуры, проводить анализ её технического состояния, не используя дорогостоящую разборку и не нарушая приработку деталей. Это удобный и наиболее безопасный способ, не требующий больших затрат времени.

В данной статье рассматривается дефект типа трещина в элементах конструкции, которые можно представить как однородный стержень.

Механические системы, показанные на рис. 1, являются простейшими моделями стержня со свободным правым концом. Рассматриваются задачи о продольных колебаниях такого стержня для двух случаев закрепления левого конца — упругого и заделки. Первый случай моделируется механической системой с двумя степенями свободы (рис. 1(а)), а второй — с одной (рис. 1(б)). Стержень массы $m = m_1 + m_2$ считаем однородным. Трещину, как и в [1], моделируем пружиной с жесткостью $k_2 \in [0;+\infty]$, где $k_2 = 0$ соответствует полному расколу, а $k_2 = +\infty$ говорит об отсутствии повреждения, т. е. чем больше жесткость, тем меньше трещина. Местоположение трещины моделируем отношением $\frac{m_1}{m}$ (например, $\frac{m_1}{m} = 0{,}5$ соответствует случаю, когда трещина посередине стержня).



а)



б)

Рис. 1. Система из двух масс, соединённых пружинами

Для случая с упругого закрепленным стержнем известными считаем частоты ω_1, ω_2, общую массу m и жесткость пружины k_1. По их значениям находим массы m_1, m_2 и жесткость пружины k_2.

В случае заделки стержня, система будет иметь всего одну частоту ω_1, из-за этого невозможно вычислить массы m_1, m_2, не зная значения жесткости пружины k_2. Поэтому во второй задаче известными являются ω_1, m и k_2, а искомыми — m_1, m_2.

Ранее колебания системы двух масс, соединенных пружинами, рассматривались в [1], где были найдены массы тел и жесткости пружин m_1, m_2, k_1, k_2 по известным собственным частотам ω_1, ω_2, общей массе $m = m_1 + m_2$ (или же общей жесткости системы k, заданной соотношением $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$), и частоте ω^*, полученной фиксацией массы m_2.

1. СЛУЧАЙ УПРУГОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ ЛЕВОГО КОНЦА СТЕРЖНЯ

1.1. Прямая задача

Прежде чем приступить к решению обратной задачи, напомним прямую, а также приведём её численный расчёт в виде графиков.

Уравнения движения для системы (рис. 1 (а)) имеют вид:

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 = k_2(u_2 - u_1) - k_1 u_1, \\ m_2\ddot{u}_2 = -k_2(u_2 - u_1), \end{cases} \tag{1}$$

где m_1, m_2 — массы, на которые трещина разделила стержень, т. е. $m_1 + m_2 = m$ — полная масса, k_1 — жесткость закрепления, k_2 — жесткость моделирующая трещину.

Из системы уравнений (1) находим собственные частоты ω_1, ω_2:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0. \tag{2}$$

Собственные частоты являются корнями определителя:

$$\Delta(\omega) \equiv m_1 m_2 \omega^4 - \{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2\}\omega^2 + k_1 k_2 = 0. \tag{3}$$

На рис. 2 приведены графики зависимости $\omega_1(m_1)$ и $\omega_2(m_1)$ при различных значениях жесткости пружин k_1, k_2. Из них видно, что увеличение m_1, т. е. перемещение трещины вправо, приводит к увеличению первой частоты ω_1 и уменьшению второй ω_2, причём в тот момент, когда ω_1 начинает замедлять свой рост, ω_2 наоборот начинает увеличиваться. Также графики говорят о том, что изменение жёсткости пружин k_1, k_2 в большую сторону приводит к росту обеих частот ω_1, ω_2, но k_2 не влияет на величину максимального значения ω_1.

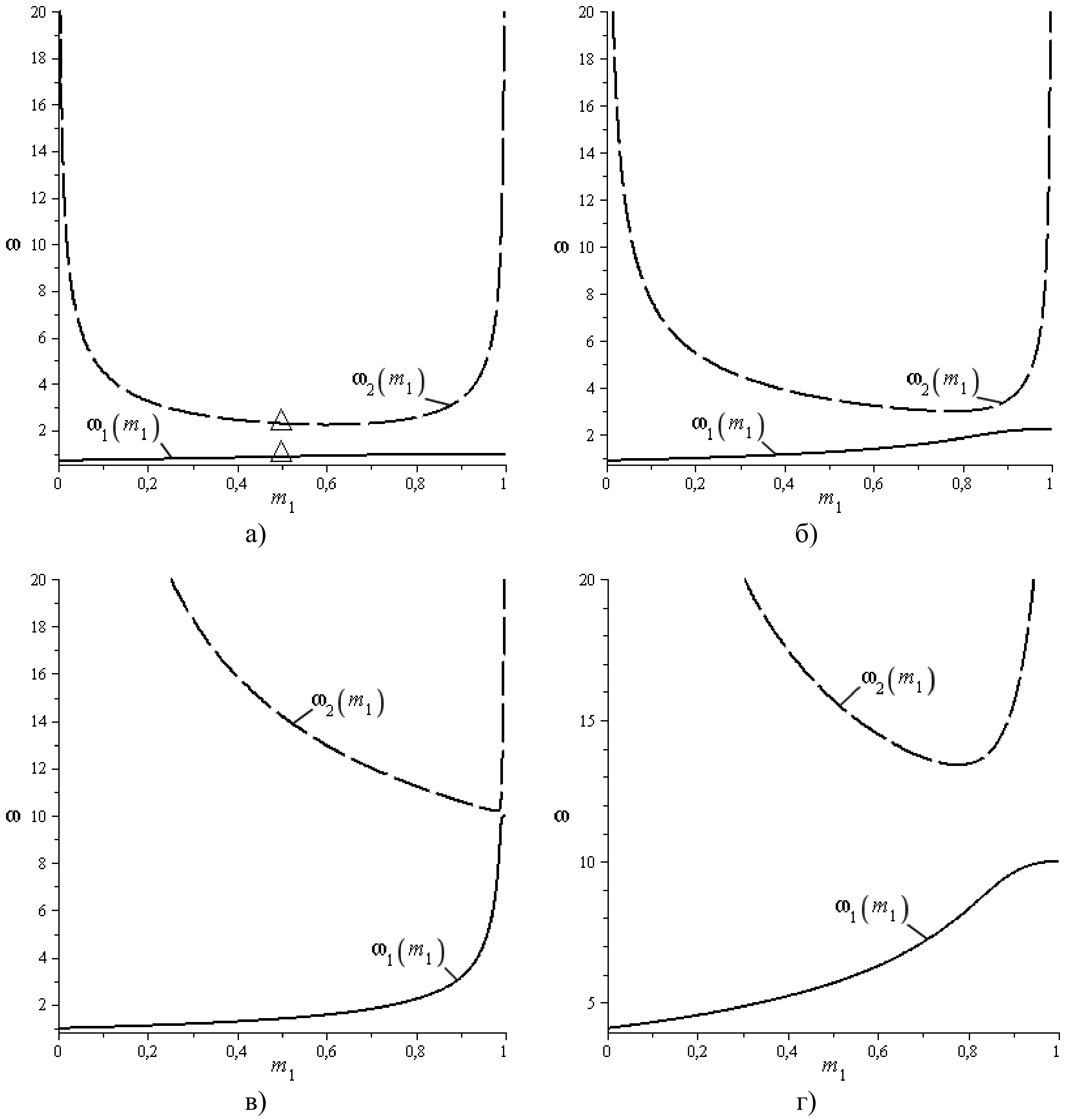


Рис. 2. Графики $\omega_1(m_1)$ (сплошная линия) и $\omega_2(m_1)$ (штриховая линия) при (а) $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, (б) $k_1 = 5$, $k_2 = 1$, (в) $k_1 = 100$, $k_2 = 1$, (г) $k_1 = 100$, $k_2 = 20$

1.2. Обратная задача

Теперь определим местоположение трещины (m_1) и её величину (k_2) исходя из известных $\omega_1, \omega_2, k_1, m$.

Сумма и произведение квадрата корней ω_1^2, ω_2^2 уравнения (3) имеют вид:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{k_2 m_1 + (k_1 + k_2) m_2}{m_1 m_2} = \frac{k_2}{m_2} + \frac{(k_1 + k_2)}{m_1}, \tag{4}$$

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}. \tag{5}$$

Далее, из (5) находим величину трещины

$$k_2 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 m_1 m_2}{k_1}. \tag{6}$$

Подставив (6) в (4) и заменив m_2 на $m - m_1$ получаем

$$\frac{\omega_1^2 \omega_2^2 m_1^2}{k_1} + \left(\frac{\omega_1^2 \omega_2^2 (m - m_1)}{k_1} - \omega_1^2 - \omega_2^2 \right) m_1 + k_1 = 0,$$

отсюда

$$m_1 = \frac{k_1^2}{\omega_1^2 k_1 + \omega_2^2 k_1 - \omega_1^2 \omega_2^2 m}. \tag{7}$$

Теперь, умножив длину стержня на отношение $\frac{m_1}{m}$, можем рассчитать расстояние от места крепления до трещины.

2. СЛУЧАЙ ЖЕСТКОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ ЛЕВОГО КОНЦА СТЕРЖНЯ

2.1. Прямая задача

Рассмотрим случай с жёсткого закреплёния левого конца стержня (рис. 1(б)).

В этом случае уравнения движения примут вид:

$$m_2 \ddot{u} = -k_2 u. \tag{8}$$

Из (8) находим:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}. \tag{9}$$

Далее приводим графики зависимости частоты колебаний от массы тела $\omega_1(m_2)$ при различных значениях жесткости пружины k_2 (рис. 3). На данных графиках видно, что увеличение массы m_2, т. е. перемещение трещины влево, приводит к росту частоты ω_1. Также сравнивая значения $\omega_1(m_2)$ при различных k_2, можем сделать вывод о том, что трещина, разрастаясь, уменьшает собственную частоту колебаний стержня.

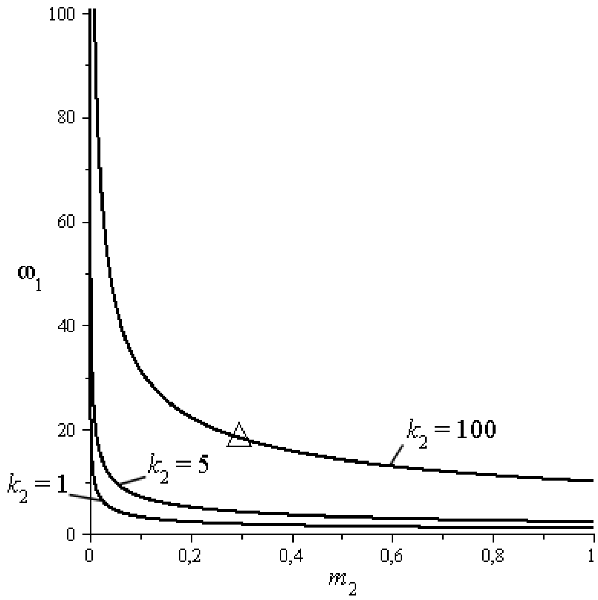


Рис. 3. График $\omega_1(m_2)$

2.2. Обратная задача

Если частота ω_1 и жесткость пружины k_2 известны, то из (9) следует, что

$$m_2 = \frac{k_2}{\omega_1^2}. \tag{10}$$

Далее, умножив длину стержня на отношение $\frac{m_1}{m} = \frac{m - m_2}{m}$, рассчитываем расстояние от места крепления до трещины.

3. ПРИМЕРЫ

3.1. Пример 1

Применение найденного метода рассмотрим на примере. Значения частот и продольную жесткость закрепления стержня возьмём из графиков прямой задачи $k_1 = 1$ Н/м, $\omega_1 = 2{,}32$ рад/с, $\omega_2 = 0{,}878$ рад/с (обозначены треугольниками на рис. 2), т.к. далее по ним можно будет проверить достоверность расчетов. Общая масса стержня $m = 1$ кг, длина $l = 1$ м.

Найдем жесткость в области трещины k_2 и массы по обе стороны от неё m_1, m_2.

Подставим известные нам данные в (7):

$$m_1 = \frac{1^2}{2{,}32^2 \cdot 1 + 0{,}878^2 \cdot 1 - 2{,}32^2 \cdot 0{,}878^2 \cdot 1} = 0{,}4989, \text{ кг},$$

$$m_2 = 1 - 0{,}499 = 0{,}5011, \text{ кг}.$$

Следовательно, трещина находиться в $\frac{0{,}4989}{1} = 0{,}4989$ м от закреплённого конца стержня.

Далее, подставив в (6) полученные значения m_1 и m_2, находим

$$k_2 = \frac{2{,}32^2 \cdot 0{,}878^2 \cdot 0{,}4989 \cdot 0{,}5011}{1} = 1{,}03, \text{ Н/м.}$$

Как видим, расчёты совпадают с данными прямой задачи.

3.2. Пример 2

Стержень массой $m = 1$ кг и длиной $l = 1$ м закреплён жестко. Собственная частота продольных колебаний $\omega_1 = 18{,}26$ рад/с, жесткость в области трещины $k_2 = 100$ Н/м (обозначены треугольником на рис. 3).

Подставив данные в (10), получаем

$$m_2 = \frac{100}{18{,}26^2} = 0{,}2999, \text{ кг.}$$

Расчёты совпадают с данными прямой задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод может быть использован для определения местоположения трещины в стержне по его продольным колебаниям, а в некоторых случаях даёт также возможность судить о размерах трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладвелл Г. М. Л. Обратные задачи теории колебаний. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008, 608 с.