

А. М. Ахтямов¹, Е. В. Салыхова²

¹Институт механики УНЦ РАН, 450054, г. Уфа, пр. Октября, 71,
e-mail: AkhtyamovAM@mail.ru,

²ГОУ ВПО филиал УГАТУ в г. Нефтекамске, ул. Социалистическая, 42,
e-mail: Shalunova_ev@rambler.ru

Всегда ли наличие полости в стержне меняет собственные частоты?

Получена 26.02.2011, опубликована 21.04.2011

В статье исследуется поведение собственных частот стержня с полостью (подвергнувшегося коррозии) и сплошного (бездефектного) стержня. Выявлено, что при определенном положении полости в стержне, собственные частоты изгибных колебаний стержня с полостью совпадают с собственными частотами колебаний сплошного стержня. Показана зависимость поведения собственных частот от значений параметра, характеризующего положение полости стержня. Доказано, что одного спектра частот изгибных колебаний еще недостаточно для идентификации местоположения и размеров полости. Для идентификации полости предложено использование собственных частот из двух спектров изгибных колебаний (вокруг разных осей).

Ключевые слова: стержень, собственные частоты, диагностика.

ВВЕДЕНИЕ

Стержни, балки являются деталями многих механизмов и конструкций, в которых часто образуются дефекты (трещины, полости из-за коррозии, ударов и т. п.). Для предотвращения аварий и поломок возникает задача их ранней диагностики. Часто для выявления дефекта в стержне и его местоположения используют собственные частоты его колебаний [1–8]. Однако всегда ли собственные частоты позволяют выявить дефект? Не бывает ли таких случаев, когда появление (развитие) дефекта не меняет спектра собственных частот колебаний? В настоящей статье ответ на этот вопрос дается для дефекта в виде полости.

Известно, что собственные частоты поперечных колебаний стержня с раскрытой трещиной, как правило, *ниже* собственных частот колебаний сплошного (бездефектного) стержня [1–4], а собственные частоты поперечных колебаний стержня с полостью, расположенной в срединной оси, *выше* собственных частот колебаний сплошного стержня [5–8]. При перемещении полости стержня от срединной оси к внешнему краю, стержень с полостью становится в итоге стержнем с открытой трещиной. На основе этого факта можно сделать предположение: при определенном положении полости стержня, собственные частоты колебаний стержня с полостью совпадают с собственными частотами колебаний сплошного бездефектного стержня.

В настоящей работе показана справедливость данного предположения. Для наглядности соответствующие схемы и расчеты сделаны на примере изгибных колебаний стержня квадратного сечения и стержня с полостью, имеющей квадратное сечение. Сначала соответствующие результаты приводятся для стержня с полостью, проходящей по всей длине стержня, а затем для стержня с локальной полостью.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРУБЧАТОГО СТЕРЖНЯ

Рассмотрим колебания сплошного призматического стержня и трубчатого призматического стержня, с полостью проходящей по всей длине стержня. Сечения рассматриваемых стержней изображены на рис. 1.

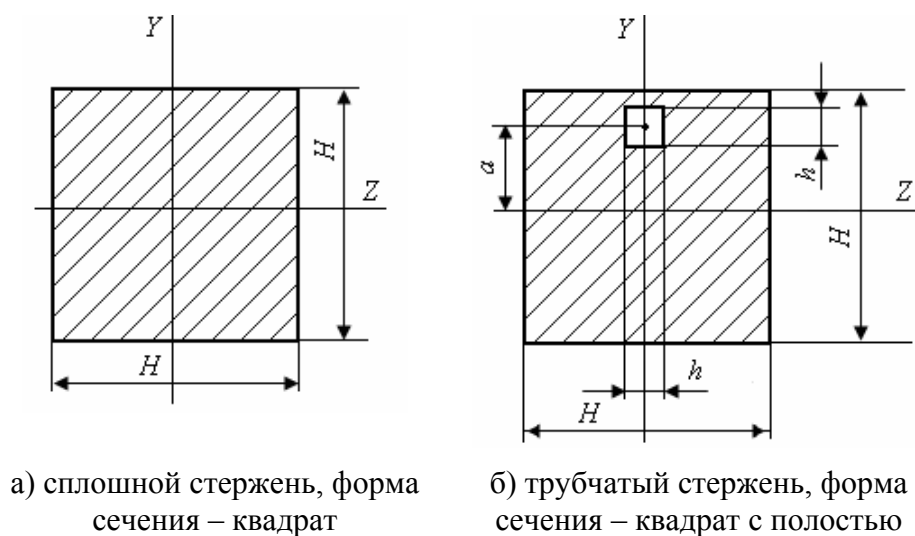


Рис. 1. Поперечные сечения рассматриваемых стержней

Будем считать, для определенности, что модули упругости E и плотности ρ сплошного и трубчатого стержней совпадают и являются константами. Через J_1 , F_1 обозначим соответственно момент инерции и площадь поперечного сечения сплошного стержня, а через J_2 , F_2 — момент инерции и площадь поперечного сечения трубчатого стержня. Собственные частоты изгибных колебаний сплошного стержня будем обозначать через ω_i^* ($i = 1, 2, \dots$), а собственные частоты трубчатого стержня — через ω_i^a . Для данных стержней выберем следующий вид закрепления: левый конец жестко закреплён, правый конец свободен (консольный стержень).

Уравнение изгибных колебаний стержня с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид [9]:

$$EJ \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

где $u(x,t)$ — прогиб текущей оси стержня, E [кг/м²] — модуль упругости, J [м⁴] — момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний, ρ [кг/м³] — плотность стержня, F [м²] — площадь поперечного сечения стержня.

Задача о изгибных колебаниях консольного стержня длины L заменой $u(x, t) = y(x) \cos \omega t$ сводится к следующей спектральной задаче [9]:

$$y^{(4)}(x) = \lambda^4 y(x), \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(L) = 0, \quad y'''(L) = 0, \quad (2)$$

где $\lambda^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}$, ω — частотный параметр.

Как видно из рис. 1, параметр a определяет положение полости трубчатого стержня. При $a = 0$ полость лежит на срединной оси стержня. При значениях параметра $\left(\frac{H}{2} - \frac{h}{2}\right) \leq a < \left(\frac{H}{2} + \frac{h}{2}\right)$ рассматриваемый трубчатый стержень превращается в стержень с открытой трещиной (надрезом). Как было отмечено ранее, собственные частоты стержня с полостью на срединной оси выше, а стержня с трещиной, наоборот, как правило, ниже собственных частот сплошного стержня. Если при определенных значениях параметра a собственные частоты трубчатого стержня ω_i^a совпадают с собственными частотами сплошного стержня ω_i^* , то необходимо выяснить при каких значениях параметра это происходит.

В терминах спектральной задачи (1)–(2) данная задача сводится к исследованию того, при каких значениях параметра a выполняется соотношение $\frac{\omega_i^a}{\omega_i^*} = 1$. Ввиду формулы $\lambda^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}$ и того, что E , ρ , J_1, F_1 , J_2 , F_2 не зависят от переменной x , последнее соотношение равносильно следующему: $\frac{J_1}{F_1} = \frac{J_2}{F_2}$. Требуется найти значения a , при которых это соотношение имеет место.

2. ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА, ПРИ КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ СПЕКТРЫ ЧАСТОТ СПЛОШНОГО И ТРУБЧАТОГО СТЕРЖНЕЙ

Площадь поперечного сечения и момент инерции рассматриваемого сплошного стержня имеют вид:

$$F_1 = H^2, \quad J_1 = \frac{H^4}{12}.$$

Площадь поперечного сечения рассматриваемого трубчатого стержня равна $F_2 = H^2 - h^2$. Определим момент инерции сечения трубчатого стержня.

Выберем систему осей Z и Y (оси проходят через центр квадрата со стороной H). Нейтральная ось Z_1 проходит через центр тяжести сечения. Для определения ее положения найдем центр тяжести сечения по отношению к оси Z [10].

Разобьем сечение на фигуры: 1 — квадрат ($H \times H$), 2 — полость ($h \times h$).

Площади фигур: квадрат $f_1 = H^2$, полость $f_2 = -h^2$ (для полости площадь выражается отрицательной величиной). Площадь сечения $F_2 = H^2 - h^2$.

Вычислим координаты y_i центров тяжести фигур, составляющих сечение, относительно оси Z . Результаты поместим в таблицу.

Таблица 1. Результаты расчета параметров сечения

Части сечения	Площади частей f_i	Координата y_i их центров тяжести
1	H^2	0
2	$-h^2$	a

Определим статический момент сечения относительно выбранной оси Z :

$$S_Z = H^2 \cdot 0 - h^2 \cdot a = -h^2 a.$$

Координата y_c центра тяжести сечения по отношению к оси Z имеет вид

$$y_c = \frac{S_Z}{F_2} = \frac{-h^2 a}{H^2 - h^2}.$$

Положение нейтральной оси Z_1 , проходящей через центр тяжести сечения (рис. 2), найдено.

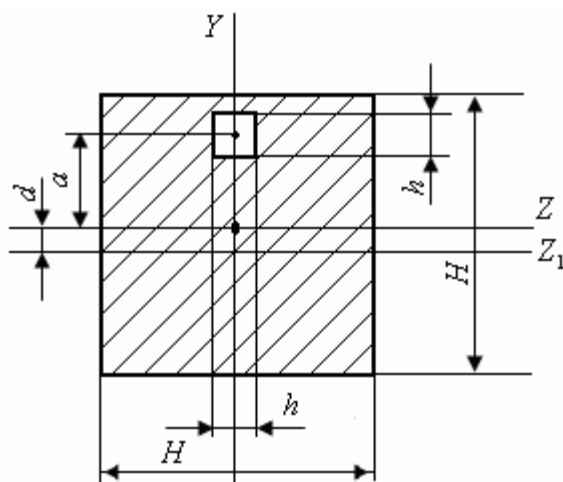


Рис. 2.

Нейтральная ось Z_1 проходит через центр тяжести сечения, $d = \frac{h^2 a}{H^2 - h^2}$

Вычислим момент инерции сечения трубчатого стержня относительно нейтральной оси Z_1 :

$$J_{Z_1} = \frac{H^4}{12} + H^2 \left(\frac{h^2 a}{H^2 - h^2} \right)^2 - \left(\frac{h^4}{12} + h^2 \left(a + \frac{h^2 a}{H^2 - h^2} \right)^2 \right).$$

После упрощения выражение для J_{Z_1} примет вид

$$J_{Z_1} = \frac{H^4 - h^4}{12} - \frac{H^2 h^2 a^2}{H^2 - h^2}.$$

Следовательно, момент инерции сечения трубчатого стержня имеет вид

$$J_2 = J_{Z_1} = \frac{H^4 - h^4}{12} - \frac{H^2 h^2 a^2}{H^2 - h^2}.$$

Определим теперь, при каких значениях параметра a выполняется соотношение

$$\frac{J_1}{F_1} = \frac{J_2}{F_2}. \text{ Имеем:}$$

$$\frac{\frac{H^4}{12}}{H^2} = \frac{\frac{H^4 - h^4}{12} - \frac{H^2 h^2 a^2}{(H^2 - h^2)}}{H^2 - h^2},$$

$$a^2 - \frac{(H^2 - h^2)^2}{12H^2} = 0,$$

$$\left(a - \frac{(H^2 - h^2)}{\sqrt{12}H}\right)\left(a + \frac{(H^2 - h^2)}{\sqrt{12}H}\right) = 0,$$

$$a = \frac{(H^2 - h^2)}{\sqrt{12}H} = \frac{(H^2 - h^2)}{2H\sqrt{3}} = \frac{(H^2 - h^2)\frac{\sqrt{3}}{3}}{2H},$$

$$a = -\frac{(H^2 - h^2)}{\sqrt{12}H} = -\frac{(H^2 - h^2)}{2H\sqrt{3}} = \frac{-(H^2 - h^2)\frac{\sqrt{3}}{3}}{2H}.$$

Таким образом, при

$$a = \frac{(H^2 - h^2)\frac{\sqrt{3}}{3}}{2H},$$

$$a = \frac{-(H^2 - h^2)\frac{\sqrt{3}}{3}}{2H},$$

собственные частоты колебаний рассматриваемых стержней совпадают.

3. ПРИМЕР

Рассмотрим полученные выше результаты на конкретном примере. Для описанных выше стержней возьмем следующие значения параметров: $H = 0,1$ м, $L = 1$ м, $\rho = 7850$ кг/м³, $E = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см² = $2,1 \cdot 10^{10}$ кг/м², $h = 0,01$ м.

С помощью разностно-аналитического метода [11] для задачи (1)–(2) получены следующие собственные значения: $\lambda_1 = 1,875$, $\lambda_2 = 4,694$, $\lambda_3 = 7,855$.

Вычислим теперь собственные частоты колебаний сплошного стержня:

$$\omega_1^* = 166,01 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right),$$

$$\omega_2^* = 1040,369 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right),$$

$$\omega_3^* = 2913,062 \left(\frac{\text{рад}}{c} \right).$$

Вычислим также собственные частоты колебаний трубчатого стержня при различных значениях параметра a , результаты поместим в таблицу.

Таблица 2. Собственные частоты колебаний трубчатого стержня при различных значениях параметра a

Значения параметра a	$\omega_1^a \left(\frac{\text{рад}}{c} \right)$	$\frac{\omega_1^a}{\omega_1^*}$	$\omega_2^a \left(\frac{\text{рад}}{c} \right)$	$\frac{\omega_2^a}{\omega_2^*}$	$\omega_3^a \left(\frac{\text{рад}}{c} \right)$	$\frac{\omega_3^a}{\omega_3^*}$
0	166,838	1,0050	1045,557	1,0050	2927,591	1,0050
0,005	166,813	1,0048	1045,399	1,0048	2927,147	1,0048
0,01	166,737	1,0044	1044,924	1,0044	2925,816	1,0044
0,015	166,611	1,0036	1044,131	1,0036	2923,596	1,0036
0,02	166,433	1,0025	1043,019	1,0025	2920,484	1,0025
0,025	166,205	1,0012	1041,589	1,0012	2916,479	1,0012
0,02857883833	166,01	1	1040,369	1	2913,062	1
0,03	165,926	0,9995	1039,838	0,9995	2911,577	0,9995
0,035	165,595	0,9975	1037,765	0,9975	2905,772	0,9975
0,04	165,212	0,9952	1035,368	0,9952	2899,06	0,9952
0,045	164,778	0,9926	1032,645	0,9926	2891,435	0,9926

Как видно из таблицы, частоты колебаний сплошного стержня и трубчатого стержня

совпадают при $a = \frac{(H^2 - h^2) \frac{\sqrt{3}}{3}}{2H} = 0,02857883833$. Заметим, что значения отношения

$\frac{\omega_i^a}{\omega_i^*}$ не зависят от $i = 1, 2, 3$.

4. НЕЗАВИСИМОСТЬ ОТНОШЕНИЯ $\frac{\omega_i^a}{\omega_i^*}$ ОТ i ДЛЯ ТРУБЧАТОГО СТЕРЖНЯ

Закономерность, обнаруженная выше для числового примера является общей, верной не только для рассматриваемого примера: отношение $\frac{\omega_i^a}{\omega_i^*}$ не зависит от i для всех $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ Последнее следует из следующей формулы:

$$\frac{\omega_i^a}{\omega_i^*} = \frac{\sqrt{\frac{EJ_2}{\rho F_2}} \lambda_i^2}{\sqrt{\frac{EJ_1}{\rho F_1}} \lambda_i^2} = \sqrt{\frac{J_2 F_1}{J_1 F_2}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

На рис. 3 изображен график, показывающий зависимость отношения $\frac{\omega_i^a}{\omega_i^*}$ от значений параметра a при произвольных $i = 1, 2, 3, \dots$ для рассмотренного выше примера.

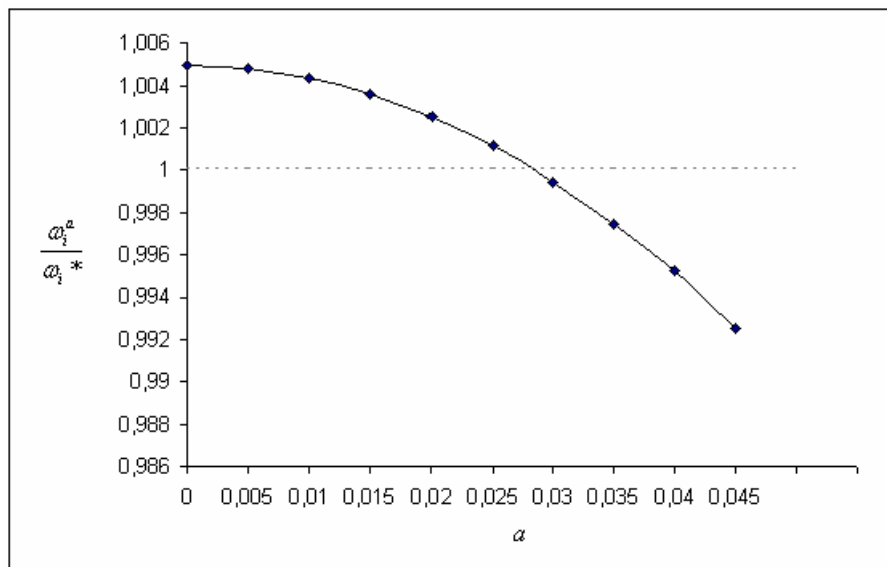


Рис. 3. Зависимость отношения $\frac{\omega_i^a}{\omega_i^*}$ от значений параметра a при произвольном i

5. ДИАГНОСТИРОВАНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ И РАЗМЕРОВ ПОЛОСТИ

Из предыдущих рассуждений следует, что идентификация цилиндрической полости в стержне только по одному спектру частот его изгибных колебаний (вокруг оси Z_1) невозможна. Однако если использовать дополнительно еще один спектр частот (вокруг оси Y), то такая идентификация становится возможной. Действительно, в этом случае

из формулы $\omega_i = \sqrt{\frac{EJ_Y}{\rho F_2}} \lambda_i^2$ для собственных частот изгибных колебаний (вокруг оси Y)

по любой из собственных частот ω_i найдем:

$$\frac{J_Y}{F_2} = \frac{H^4 - h^4}{12(H^2 - h^2)} = \frac{H^4 - h^4}{12(H^2 - h^2)} = \frac{H^2 + h^2}{12}.$$

Откуда становится известен параметр размера полости h (если H известно). Тогда параметр местоположения полости a^2 можно определить с помощью собственной

частоты $\omega_i^a = \sqrt{\frac{EJ_2}{\rho F_2}} \lambda_i^2$ (вокруг оси Z_1), где $J_2 = J_{Z_1} = \frac{H^4 - h^4}{12} - \frac{H^2 h^2 a^2}{H^2 - h^2}$.

Таким образом, используя по одной собственной частоте из двух разных спектров частот изгибных колебаний, можно однозначно идентифицировать h и a^2 .

6. СЛУЧАЙ ЛОКАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

Покажем, что в случае локальной полости, т.е. полости, не проходящей по всей длине стержня, также есть положения полости, при которых собственные частоты изгибных колебаний стержня с полостью совпадают с собственными частотами изгибных колебаний стержня без полости. Однако случай локальной полости отличается от случая полости, проходящей по всей длине стержня, тем, что эти положения полости являются разными для первой, второй, третьей и последующих частот.

Итак, рассмотрим случай локальной полости. Для этого возьмем конкретный пример. Значения параметров стержня с полостью такие же, как и для описанных выше стержней. Полость длиной 0,48 м имеет квадратное сечение ($h = 0,01$ м) и лежит на отрезке $[0,26; 0,74]$. Спектральная задача (1)–(2) для рассматриваемого стержня с полостью имеет вид [9]:

$$\begin{aligned}
 y^{(4)}(x) &= \frac{\rho F \omega^2}{EJ} y(x), \\
 y(0) &= 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(1) = 0, \quad y'''(1) = 0, \\
 y_1(x_1) &= y_2(x_1), \quad y_2(x_2) = y_3(x_2), \\
 y_1'(x_1) &= y_2'(x_1), \quad y_2'(x_2) = y_3'(x_2), \\
 EJ_1 y_1''(x_1) &= EJ_2 y_2''(x_1), \quad EJ_2 y_2''(x_2) = EJ_1 y_3''(x_2), \\
 EJ_1 y_1'''(x_1) &= EJ_2 y_2'''(x_1), \quad EJ_2 y_2'''(x_2) = EJ_1 y_3'''(x_2),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $x_1 = 0,26$, $x_2 = 0,74$ — границы полости, J_1 , J_2 определены ранее для сплошного и трубчатого стержня, y_1 , y_2 — прогибы соответственно слева и справа от левой границы полости, y_2 , y_3 прогибы соответственно слева и справа от правой границы полости,

$$F = \begin{cases} F_1, & x \in [0; 0,26), \\ F_2, & x \in [0,26; 0,74], \\ F_1, & x \in (0,74; 1], \end{cases} \quad J = \begin{cases} J_1, & x \in [0; 0,26), \\ J_2, & x \in [0,26; 0,74], \\ J_1, & x \in (0,74; 1]. \end{cases}$$

Равенства (3) представляют собой условия сопряжения [9, с. 197].

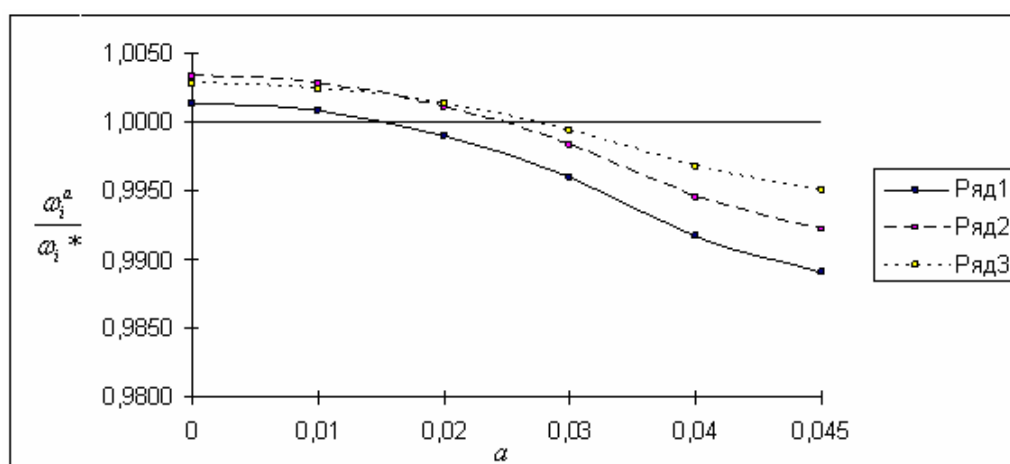
Далее расчет собственных частот ведется с помощью разностно-аналитического метода, описанного в [11]. Полученные при этом результаты занесены в таблицу 3а.

Как видно из таблицы, значения отношения $\frac{\omega_i^a}{\omega_i^*}$, $i = 1, 2, 3$ отличаются. Первая, вторая, третья частоты колебаний стержня с полостью совпадают с первой, второй, третьей частотами сплошного стержня при различных значениях параметра a .

На рис. 4 изображен график, показывающий зависимость собственных частот стержня с полостью от значений параметра a . Как видим, значения параметра a являются разными для первой, второй, третьей собственных частот.

Таблица 3. Собственные частоты колебаний стержня с полостью при различных значениях параметра a

Значения параметра a	$\omega_1^a \left(\frac{рад}{с} \right)$	$\frac{\omega_1^a}{\omega_1^*}$	$\omega_2^a \left(\frac{рад}{с} \right)$	$\frac{\omega_2^a}{\omega_2^*}$	$\omega_3^a \left(\frac{рад}{с} \right)$	$\frac{\omega_3^a}{\omega_3^*}$
0	166,239	1,0014	1043,818	1,0033	2921,126	1,0028
0,01	166,138	1,0008	1043,249	1,0028	2920,040	1,0024
0,02	165,837	0,9990	1041,539	1,0011	2916,772	1,0013
0,03	165,334	0,9959	1038,681	0,9984	2911,294	0,9994
0,04	164,626	0,9917	1034,660	0,9945	2903,562	0,9967
0,045	164,195	0,9891	1032,208	0,9922	2898,830	0,9951

Рис. 4. Зависимость собственных частот стержня с полостью от значений параметра a ,

ряд 1 соответствует $\frac{\omega_1^a}{\omega_1^*}$, ряд 2 соответствует $\frac{\omega_2^a}{\omega_2^*}$, ряд 3 соответствует $\frac{\omega_3^a}{\omega_3^*}$

ВЫВОДЫ

1. Проведенное исследование на примере колебаний сплошного призматического стержня и стержня таких же размеров, имеющего полость, проходящую по всей длине стержня (трубчатого стержня), подтверждает: при определенном положении полости стержня, один из спектров собственных частот изгибных колебаний стержня с полостью совпадает с соответствующим спектром собственных частот колебаний сплошного бездефектного стержня.
2. Аналитически выявлено значение параметра a , характеризующего положение полости трубчатого стержня, при котором спектр частот его изгибных колебаний (вокруг оси Z_1) совпадает с соответствующим спектром частот сплошного стержня.
3. Показано, что одного спектра частот изгибных колебаний еще недостаточно для идентификации местоположения и размеров полости. Для идентификации полости необходимо использование собственных частот из двух спектров

изгибных колебаний (вокруг разных осей). По двум собственным частотам, каждая из которых взята из спектров частот изгибных колебаний трубчатого стержня вокруг разных осей, можно однозначно идентифицировать параметры размера h и местоположения a^2 полости.

4. В случае локальной полости, т.е. полости, не проходящей по всей длине стержня, также есть положения полости, при которых собственные частоты изгибных колебаний стержня с полостью совпадают с собственными частотами изгибных колебаний стержня без полости. Однако случай локальной полости отличается от случая полости, проходящей по всей длине стержня, тем, что эти положения полости являются разными для первой, второй, третьей и последующих частот.

Таким образом, если полость может развиваться в промежутке между поверхностью стержня и его нейтральной осью, следует с осторожностью применять методы диагностирования дефектов с помощью одного спектра собственных частот колебаний. Они не всегда позволяют выявить и правильно идентифицировать такой дефект.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и АН Республики Башкортостан (проекты 11-01-00293-а, 11-01-97002-р_поволжье_а).

Авторы выражают признательность М. А. Ильгамову и Б. М. Люпаеву за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладвелл Г. М. Л. Обратные задачи теории колебаний. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008, 608 с.
2. Ваньков Ю. В., Казаков Р. Б., Яковлева Э. Р. Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2003, 5.
3. Morassi A. Crack-induced changes in eigenparameters of beam structures // ASCE Journal of engineering mathematics, 1993, vol. 119 (9), p. 1798–1803.
4. Ильгамов М. А., Хакимов А. Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия, 2009, № 5, с. 83–89.
5. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007, 224 с.
6. Ватульян А. О., Солуянов Н. О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия, 2005, № 9, с. 44–56.
7. Ватульян А. О., Солуянов Н. О. Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // Прикладная механика и техническая физика, 2008, Т. 49, № 6, с. 152–158.
8. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р. Определение полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия, 2010, № 5, с. 29–33.
9. Вибрации в технике: Справочник под. ред. В. В. Болотина. Т. 1. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1978, 352 с.
10. Рудицын М. Н., Артемов П. Я., Любошиц М. И. Справочное пособие по сопротивлению материалов. Минск: Вышэйшая школа, 1970, 630 с.
11. Абзалимов Р. Р., Салыхова Е. В. Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений 4-го порядка с разделенными краевыми условиями // Известия вузов. Математика, 2008, № 11, с. 3–11.