

А. Н. Неверов

*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), г. Москва, 125164, Ленинградский пр., 64; e-mail: [neverov\\_an@mail.ru](mailto:neverov_an@mail.ru)*

## О нелинейности акустического контакта в составных стержневых колебательных системах

*Получена 14.09.2014, опубликована 08.11.2014*

Проведено теоретическое исследование свойств сухого плоского акустического контакта. Показано, что зависимость между силой и смещением в контакте нелинейная. По этой причине контакт может быть генератором высших гармоник. Получены выражения для амплитуд гармоник и для эффективной податливости акустического контакта на первой гармонике.

Ключевые слова: акустический контакт, ультразвук, колебательная система, высшие гармоники

### ВВЕДЕНИЕ

Мысль Кирхгофа о том, что «электротехника – это наука о контактах» давно уже стала тривиальной. Влиянием же параметров контакта на свойства акустических систем долго пренебрегали. Это связано, по-видимому, с тем, что долгое время мощные ультразвуковые преобразователи изготавливались из одного прутка металла. Все рекомендации по соединению элементов сводились к указанию о креплении вблизи узла механических напряжений.

Необходимость снижения массы и габаритов преобразователей, однако, обусловила необходимость соединений в любых других областях колебательных систем, и сразу стало очевидным сильное влияние параметров акустического контакта на свойства преобразователей. Выяснилось, в частности, что акустический контакт нелинеен, и эта нелинейность оказалась существенно больше объемной, обусловленной ангармонизмом сил межмолекулярного взаимодействия. По этой причине она весьма перспективна для практических применений.

Известно, что поверхности реальных тел не могут быть идеально гладкими. При обработке материалов на их поверхностях появляется т.н. технологическая шероховатость (микрорельеф). В процессе эксплуатации эта шероховатость несколько модифицируется, но не исчезает [1, 2].

Шероховатость поверхности образует ее микрорельеф, который может быть исследован при помощи профилограмм. При соприкосновении двух шероховатых поверхностей их контакт будет фрагментарным. При эксплуатации изделия на его

функциональные показатели влияет не вся номинальная поверхность контакта, а только ее «фрагментированная» часть. Фактическая площадь контакта (ФПК) есть сумма элементарных площадок контакта, возникающих в результате деформации отдельных неровностей. Эта площадь определяет область силового взаимодействия шероховатых тел. Потому расчет фактической площади контакта (ФПК) твердых тел или относительной величины ФПК  $\eta$  (отношение ФПК к номинальной площади контакта) является актуальной задачей вообще и для предлагаемого исследования, в частности.

Зависимость ФПК от степени сближения поверхностей отражается опорной кривой профиля – графическим изображением зависимости опорной длины профиля от уровня его сечения. Опорная кривая профиля характеризует распределение материала в шероховатом слое. Показано [3, 4], что начальная часть опорной кривой профиля хорошо аппроксимируется степенной зависимостью:

$$tp = bx^v, \quad (1)$$

где  $tp$  – относительная опорная длина профиля;  $x = \frac{u}{H_{\max}}$ ;  $u$  – расстояние от линии выступов на профилограмме до текущего значения профиля;  $H_{\max}$  – расстояние между линией выступов и линией впадин в пределах базовой длины;  $b$  и  $v$  – эмпирические параметры, получаемые путем обработки профилограмм поверхностей [4].

Модель и реальное тело считаются адекватными, если распределение материала по высоте одинаковое, т.е. если совпадают их опорные кривые (1).

Характерные особенности процесса формирования ФПК сводятся в основном к следующему [2]:

1. контакт шероховатых поверхностей имеет дискретный характер;
2. элементарные контакты (фактические пятна контакта) возникают в результате как упругих, так и пластических деформаций;
3. ФПК и действующая нагрузка  $N$  связаны соотношением  $S_{\text{факт}} = \text{const} \cdot N^n$ , где  $n = 1$  при пластическом контакте и весьма близко к 1 ( $n = 0,8 \dots 0,9$ ) при упругом.
4. с ростом нагрузки увеличение площади фактического контакта происходит в основном за счет возникновения новых пятен контакта, при этом средний размер пятна остается почти постоянным; следует иметь в виду, что каждое индивидуальное пятно возрастает с нагрузкой и слабо изменяется именно средний размер пятна за счет увеличения числа пятен контакта, размер которых мал.

Согласно пункту 1 модель шероховатого тела может быть представлена набором выступов, причем последние необходимо описать рядом параметров, характеризующих их геометрическую форму.

## 1. СТЕРЖНЕВАЯ МОДЕЛЬ СУХОГО ПЛОСКОГО АКУСТИЧЕСКОГО КОНТАКТА

Поскольку объектом нашего исследования являются стержневые колебательные системы, логично с учетом пункта 4 принять стержневую модель [5].

Исходя же из пункта 2, можно сказать, что контакт шероховатых поверхностей в стержневых колебательных системах будет влиять на величину как собственных частот, так и максимально достижимых амплитуд колебаний.

Факт зависимости параметров составных колебательных систем от усилия статического сжатия элементов известен достаточно давно [6 – 8]. С другой стороны, авторами ряда экспериментальных работ наблюдались нелинейные эффекты при отражении упругих волн от поверхности сухого контакта двух полубесконечных твердых тел [9, 10]. В теоретической работе [11] контакт аппроксимируется ансамблем одинаковых пружинок различной длины. Физически это вполне оправдано, поскольку короткий тонкий стержень может быть описан как сосредоточения упругость.

Итак, рассмотрим сухой контакт двух плоских шероховатых поверхностей.

Модель «набирается» из стержней различной длины, распределение которых задается с помощью функции  $n(\varepsilon)$  – число стержней, пересекаемых сечением, соответствующим относительному сближению поверхностей  $\varepsilon$ . Показано, что контакт двух шероховатых поверхностей может быть описан как контакт гладкой поверхности с шероховатой, параметры опорной кривой которой  $b_s$  и  $\nu_s$  определяются по формулам:

$$b_s = k_{\nu_{1,2}} b_{s1} b_{s2} \frac{(H \max_1 + H \max_2)^{\nu_{s1} + \nu_{s2}}}{H^{\nu_{s1}} \max_1 \cdot H^{\nu_{s2}} \max_2}; \nu_s = \nu_{s1} + \nu_{s2},$$

где  $b_{s1}, \nu_{s1}, b_{s2}, \nu_{s2}$  — параметры опорных кривых контактирующих поверхностей,  $H \max_1, H \max_2$  — их максимальные высоты неровностей,

$$k_{\nu_{1,2}} = \frac{\nu_{s1} \cdot \nu_{s2}}{\nu_{s1} + \nu_{s2}} \cdot \frac{\Gamma(\nu_{s1})\Gamma(\nu_{s2})}{\Gamma(\nu_{s1} + \nu_{s2})}.$$

Модель такого сближения приведена на рис. 1. Шероховатая поверхность моделируется набором однородных стержней различной высоты. Эта модель физически вполне обоснована, т.к., хотя площадь пятна касания каждого отдельного выступа увеличивается при сближении поверхностей, средняя площадь пятна касания остается практически неизменной из-за того, что в контакт вступают все новые и новые выступы.

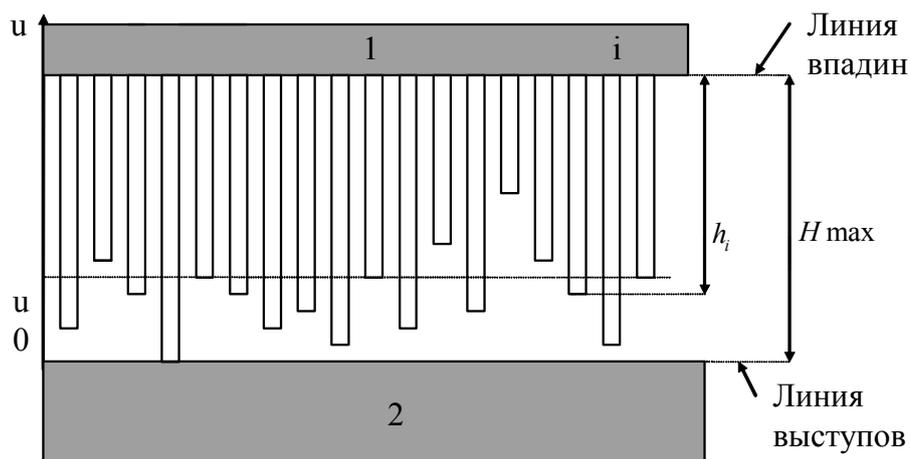


Рис. 1. Стержневая модель акустического контакта

Пусть гладкая поверхность (нижняя, помеченная цифрой 2) сближается с линией впадин шероховатой поверхности на величину  $u$  (координата  $u = 0$  соответствует линии выступов). Линию впадин мы считаем неподвижной, ее координата всегда равна  $H_{\max}$ . При этом сила, действующая на  $i$ -й выступ высоты  $h_i$  в соответствии с законом Гука должна быть равна

$$F_i = ES_i \frac{h_i + u - H_{\max}}{h_i},$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $S_i$  – площадь сечения  $i$ -го выступа,  $h_i$  – максимальная высота  $i$ -го выступа шероховатой поверхности, которого достигла гладкая.

Это выражение может быть приведено к виду:

$$F_i = ES_i \frac{x - \varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} \tilde{\Gamma}(x - \varepsilon_i), \tag{2}$$

где  $x = \frac{u}{H_{\max}}$  – относительное сближение поверхностей,  $\varepsilon_i = 1 - \frac{h_i}{H_{\max}}$ ,  $\tilde{\Gamma}(x - \varepsilon_i)$  – единичная функция Хевисайда.

Силу, действующую на все выступы шероховатой поверхности при относительном сближении ее с гладкой на  $x$ , определим суммированием выражений (2) по всей поверхности:

$$F(x) = \sum_{i=1}^N ES_i \frac{x - \varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} \tilde{\Gamma}(x - \varepsilon_i), \tag{3}$$

где  $N$  – число выступов на поверхности контакта.

Пусть  $n(x)$  – число стержней, пересекаемых сечением  $u$ . По-видимому, можно считать функцию  $n(x)$  непрерывной и монотонной. Площадь, пересекаемая сечением  $x = 0$ , равна нулю. Площадь стержней, пересекаемых сечением  $x = 1$ , равна номинальной площади касания поверхностей. Тогда при перемещении гладкой поверхности на  $dx$  фактическая площадь контакта поверхностей увеличивается на

$$dS = S(x)n'(x)dx,$$

где  $S(x) = \sum_{i=1}^{N(x)} S_i$  – номинальная площадь контакта,  $n(x)$  – относительное количество выступов, пересекаемых сечением  $x = \varepsilon$ , функция  $n = n(\varepsilon)$  представляет собой уравнение опорной кривой шероховатой поверхности.

Заменяя сумму в (3) интегралом, получаем

$$F(x) = ES \int_0^x \frac{x - \varepsilon}{1 - \varepsilon} n'(\varepsilon) d\varepsilon. \tag{3a}$$

Обычно на практике выполняются соотношения:

$$0 \leq x \leq \varepsilon \ll 1. \tag{4}$$

Начальный участок опорной кривой шероховатой поверхности (т.е. когда выполняется условие (4)) может быть аппроксимирован степенной функцией [2]

$$n(\varepsilon) = b\varepsilon^\nu, \tag{5}$$

где  $b$  и  $\nu$  – параметры опорной кривой.

Подставляя (5) в (3) и представляя знаменатель подынтегрального выражения в виде ряда, получаем

$$\begin{aligned} F(x) &= ESb\nu \int_0^x (x - \varepsilon) \varepsilon^{\nu-1} (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots) d\varepsilon = \\ &= ESb\nu \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (x - \varepsilon) \varepsilon^{n+\nu-1} (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots) d\varepsilon = \\ &= ESb\nu \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\nu+1} \int_0^x (1 - z) z^{n+\nu-1} dz = ESb\nu \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\nu+1} B(n + \nu, 2) = \\ &= ESb\nu \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\nu+1} \frac{\Gamma(n + \nu) \cdot \Gamma(2)}{\Gamma(n + \nu + 2)}, \end{aligned} \tag{6}$$

где  $z = \frac{\varepsilon}{x}$ ,  $B(n + \nu, 2)$  – бета-функция,  $\Gamma(n + \nu), \Gamma(2), \Gamma(n + \nu + 2)$  – гамма-функция от соответствующих аргументов.

Используя свойства гамма-функции, получаем

$$F(x) = ESb\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+\nu+1}}{(n + \nu)(n + \nu + 1)} \tag{7}$$

или, подставляя значение  $x = \frac{u}{H_{\max}}$ ,

$$F(u) = ESb\nu H_{\max}^{-(n+\nu+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{n+\nu+1}}{(n + \nu)(n + \nu + 1)}. \tag{8}$$

Таким образом, зависимость между силой, действующей в контакте, и смещением нелинейна.

## 2. ГАРМОНИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА АКУСТИЧЕСКИЙ КОНТАКТ. ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК

Рассмотрим случай, когда заданы статическая сила  $P_0$  и закон колебаний

$$u_{\sim} = u_m \cos \omega t, \tag{9}$$

где  $u_{\sim}$  – текущее синусоидальное смещение в контакте в момент времени  $t$ ,  $u_m$  – амплитуда колебательного смещения в нем,  $\omega$  – круговая частота колебаний.

Тогда смещение в контакте  $u$  будет представлять собой сумму статического смещения  $u_0$  и синусоидального колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой  $u_m$  и может быть записано в виде:

$$u = u_0(1 + m \cos \omega t), \tag{10}$$

где  $m = \frac{u_m}{u_0}$ .

Будем считать, что акустический контакт не разрывается. Это выполняется при  $m \leq 1$ .

Сила  $F$ , действующая в контакте, также представляет собой сумму постоянной  $F_0$  и переменной  $F_{\sim}$  составляющих, причем переменная составляющая не монохроматична, а содержит вследствие (8) высшие гармоники. Попробуем подсчитать их амплитуды, для чего подставим (10) в (8) и разложим полученное выражение в ряд Тейлора, который вследствие (4) и (11) должен сходиться:

$$F(x) = ESb \nu H \max \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_0^{n+\nu+1}}{(n+\nu)(n+\nu+1)} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{n+\nu+1}{l} (m \cos \omega t)^l, \tag{8a}$$

где  $\binom{n+\nu+1}{l}$  – биномиальные коэффициенты.

Ограничиваясь в разложении (8a) членами порядка  $m^5$ , получаем

$$\begin{aligned} F &= \frac{ESb}{\nu+1} \left( 1 + (\nu+1)m \cos \omega t + \frac{\nu(\nu+1)}{2} m^2 \cos^2 \omega t + \right. \\ &+ \frac{(\nu-1)\nu(\nu+1)}{6} m^3 \cos^3 \omega t + \frac{(\nu-2)(\nu-1)\nu(\nu+1)}{24} m^4 \cos^4 \omega t + \\ &+ \left. \frac{(\nu-3)(\nu-2)(\nu-1)\nu(\nu+1)}{120} m^5 \cos^5 \omega t + \dots \right) \\ &= F_0 + F_1 \cos \omega t + F_2 \cos 2\omega t + F_3 \cos 3\omega t + F_4 \cos 4\omega t + F_5 \cos 5\omega t + \dots, \end{aligned} \tag{12}$$

где  $F_0$  – постоянная составляющая силы,  $F_l$  – амплитуды 1-5 гармоник силы, причем

$$\begin{aligned} F_0 &= ESb \left[ \frac{\varepsilon_0^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{\nu}{4} \varepsilon_0^{\nu-1} \varepsilon_m^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{64} \varepsilon_0^{\nu-3} \varepsilon_m^4 + \dots \right] = \\ &= \frac{ESb}{\nu+1} \varepsilon_0^{\nu+1} \left( 1 + \frac{\nu(\nu+1)}{4} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{16} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \right)^2 (1+\dots) \right) \right), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= ESb \left[ \varepsilon_0^\nu \varepsilon_m + \frac{\nu(\nu-1)}{8} \varepsilon_0^{\nu-2} \varepsilon_m^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{64} \varepsilon_0^{\nu-4} \varepsilon_m^5 + \dots \right] = \\
 &= ESb \varepsilon_0^\nu \varepsilon_m \left( 1 + \frac{\nu(\nu-1)}{8} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{8} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \right)^2 (1 + \dots) \right) \right), \tag{14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= ESb \left[ \frac{\nu}{4} \varepsilon_0^{\nu-1} \varepsilon_m^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{64} \varepsilon_0^{\nu-3} \varepsilon_m^4 + \dots \right] = \\
 &= ESb \frac{\nu}{4} \varepsilon_0^{\nu-1} \varepsilon_m^2 \left( 1 + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{16} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \right)^2 (1 + \dots) \right), \tag{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_3 &= ESb \left[ \frac{\nu(\nu-1)}{24} \varepsilon_0^{\nu-2} \varepsilon_m^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{384} \varepsilon_0^{\nu-4} \varepsilon_m^5 + \dots \right] = \\
 &= ESb \frac{\nu(\nu-1)}{24} \varepsilon_0^{\nu-2} \varepsilon_m^3 \left( 1 + \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{16} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \right)^2 (1 + \dots) \right), \tag{16}
 \end{aligned}$$

$$F_4 = ESb \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{192} \varepsilon_0^{\nu-3} \varepsilon_m^4 + \dots, \tag{17}$$

$$F_5 = ESb \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{384} \varepsilon_0^{\nu-4} \varepsilon_m^5 + \dots \tag{18}$$

При  $\varepsilon_m = 0$  постоянная составляющая силы  $F_0$  равна статической силе  $P_0$ . Нетрудно видеть, что эта статическая сила, стягивающая поверхности, связана в первом приближении со статическим смещением  $\varepsilon_0$  соотношением

$$\varepsilon_0 = \left( \frac{P_0(\nu+1)}{ESb} \right)^{\frac{1}{\nu+1}}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (13) – (18), получаем:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= P_0 + ESb \left( \frac{\nu}{4} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right) \varepsilon_m^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{64} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right)^{\frac{\nu-1}{\nu+1}} \varepsilon_m^4 + \dots \right) = \\
 &= P_0 + ESb \frac{\nu}{4} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right) \varepsilon_m^2 \left( 1 + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{16} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right)^{-\frac{2}{\nu+1}} \varepsilon_m^2 + \dots \right), \tag{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= ESb \left[ \varepsilon_0^\nu \varepsilon_m + \frac{\nu(\nu-1)}{8} \varepsilon_0^{\nu-2} \varepsilon_m^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{64} \varepsilon_0^{\nu-4} \varepsilon_m^5 + \dots \right] = \\
 &= ESb \varepsilon_0^\nu \varepsilon_m \left( 1 + \frac{\nu(\nu-1)}{8} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{8} \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0} \right)^2 (1 + \dots) \right) \right), \tag{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= ESb \left( \frac{\nu}{4} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right)^{\frac{\nu-1}{\nu+1}} \varepsilon_m^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{48} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right)^{\frac{\nu-3}{\nu+1}} \varepsilon_m^4 + \dots \right) = \\
 &= ESb \frac{\nu}{4} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right)^{\frac{\nu-1}{\nu+1}} \varepsilon_m^2 \left( 1 + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{16} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right)^{-\frac{2}{\nu+1}} \varepsilon_m^2 + \dots \right),
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 F_3 &= ESb \frac{\nu(\nu-1)}{24} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right)^{\frac{\nu-2}{\nu+1}} \varepsilon_m^3 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{384} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right)^{\frac{\nu-4}{\nu+1}} \varepsilon_m^5 + \dots = \\
 &= ESb \frac{\nu(\nu-1)}{24} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right)^{\frac{\nu-2}{\nu+1}} \varepsilon_m^3 \left( 1 + \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{16} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right)^{-\frac{2}{\nu+1}} \varepsilon_m^2 + \dots \right),
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$F_4 = ESb \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{192} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right)^{\frac{\nu-3}{\nu+1}} \varepsilon_m^4 + \dots, \tag{24}$$

$$F_5 = ESb \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{384} \left( \frac{(\nu+1)P_0}{ESb} \right)^{\frac{\nu-4}{\nu+1}} \varepsilon_m^5 + \dots. \tag{25}$$

Таким образом, эквивалентная податливость акустического контакта по первой гармонике  $C_{J1}$  в линейном приближении равна, как следует из уравнения (21),

$$C_{J1} = \frac{u}{F_1} = \frac{\varepsilon_m H \max}{F_1} \approx \frac{1}{ESb} \left( \frac{ESb}{(\nu+1)P_0} \right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} = \left( \frac{ESb}{((\nu+1)P_0)^\nu} \right)^{\frac{1}{\nu+1}}. \tag{26}$$

Эквивалентная податливость, как следует из (26), зависит от усилия стягивания стержней. Поэтому собственные частоты и амплитуды колебаний составных колебательных систем на первой гармонике также будут зависимы от условий стягивания их элементов.

Учитывая только первое слагаемое формулы (21), получаем связь между относительным смещением в контакте  $\varepsilon_m$  и первой гармоникой действующей силы  $F_1$ :

$$\varepsilon_m = \frac{F_1}{ESb} \left( \frac{ESb}{(\nu+1)P_0} \right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}. \tag{27}$$

Подставляя (2.27) в уравнения (2.22) – (2.25), получаем

$$F_2 = \frac{\nu}{4(\nu+1)} \frac{F_1}{P_0} F_1; \tag{28}$$

$$F_3 = \frac{\nu(\nu-1)}{24(\nu+1)^2} \left( \frac{F_1}{P_0} \right)^2 F_1; \tag{29}$$

$$F_4 = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{192(\nu+1)^3} \left( \frac{F_1}{P_0} \right)^3 F_1; \tag{30}$$

$$F_5 = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1920(\nu+1)^4} \left(\frac{F_1}{P_0}\right)^4 F_1; \quad (31)$$

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{2^{n-1}(\nu+1)^{n-1}\Gamma(n+1)\Gamma(\nu-n)} \left(\frac{F_1}{P_0}\right)^{n-1} F_1 = \\ &= \frac{1}{2^{n-1}(\nu+1)^{n-1}B(n+1, \nu-n)} \left(\frac{F_1}{P_0}\right)^{n-1} F_1 = \\ &= \frac{1}{B(n+1, \nu-n)} \left(\frac{F_1}{2(\nu+1)P_0}\right)^{n-1} F_1, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $B(n+1, \nu-n)$  – бета-функция,  $\Gamma(n+1), \Gamma(\nu-n), \Gamma(\nu+1)$  – гамма-функции от соответствующих аргументов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, амплитуда  $n$ -й гармоники, генерируемой плоским сухим акустическим контактом в составной ультразвуковой колебательной системе, пропорциональна  $n$ -й степени амплитуды основного возбуждающего сигнала (первой гармоники) и обратно пропорциональна  $(n-1)$ -й степени статической силы, стягивающей элементы системы.

Поскольку эквивалентная податливость акустического контакта на основной (первой) гармонике зависит от усилия стягивания элементов, параметры составной колебательной системы также будут зависимы от этого усилия. Этот факт открывает возможность управления свойствами составных колебательных систем изменением усилия стягивания их элементов.

Результаты работы нуждаются в экспериментальном подтверждении.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Комбалов, В. С. Методы и средства испытаний на трение и износ конструкционных и смазочных материалов: справ. [Текст] / В. С. Комбалов, Е. А. Марченко, К. В. Фролов и др. / под ред. К. В. Фролова, Е. А. Марченко. – М.: Машиностроение, 2008. – 384 с.
2. Крагельский, И. А., Добычин М. Н., Комбалов В. А. Основы расчетов на трение и износ. / [Текст] / И. А. Крагельский, М. Н. Добычин, В. А. Комбалов / М.: Машиностроение, 1977. – 525 с.
3. Демкин, Н. Б. Контактное шероховатых поверхностей. [Текст] / Н. Б. Демкин / М.: Наука, 1970. – 227 с.
4. Основы трибологии (трение, износ, смазка): Учебник для технических вузов [Текст] / Э. Д. Браун, Н. А. Буше, И. А. Буяновский и др. / Под ред. А. В. Чичинадзе / М.: Наука и техника, 1995. – 778 с.

5. Крагельский, И. В. Влияние различных параметров на величину коэффициента трения несмазанных поверхностей. [Текст] / И. В. Крагельский // ЖТФ. – 1943. – т. XIII. – вып. 3. – с. 145 – 151.
6. Захаров, В. И. Расчет и конструирование элементов резьбовых соединений магнотриксционных преобразователей с настроенными колебательными системами. [Текст] / В. И. Захаров. // Применение ультразвука в технологии машиностроения. Труды НИТИ, вып. VIII, часть I. М.: 1964. – с. 39 – 48.
7. Мечетнер, Б. Х. Концентраторы-инструменты для ультразвуковой обработки, способы их крепления. [Текст] / Мечетнер Б. Х. / М.: НИИМАШ, 1965. – 54 с.
8. Kazantsev, V. F. Oscillation of rod pressed to elastic surface. [Text] / V. F. Kazantsev. // Proc. Int. Congr. Acoust., Liege, 7-14 sept, 1965, L 48-5.
9. Солодов, И. Ю. «Хлопающая» нелинейность и хаос при колебаниях контактной границы твердых тел. [Текст] / И. Ю. Солодов, Чин Ан Ву // Акустический журнал. – 1993 – т. 39. – № 5. – с. 904 – 910.
10. Ко Сел Лен. Экспериментальное наблюдение влияния контактной нелинейности на отражение объемных и распространение поверхностных акустических волн. [Текст] / Ко Сел Лен, Ф. М. Северин, И. Ю. Солодов // Акустический журнал. 1991. – т. 37. – № 6. – с. 1165 – 1169.
11. Руденко, О.В. Нелинейные акустические свойства контактных поверхностей и возможности акустодиагностики статистических характеристик неровностей [Текст] / О. В. Руденко, Чинь Ань Ву // Акустический журнал. 1994. – т. 40. – № 4. – с. 668 – 672.