

Н. А. Парфентьев

*Всероссийский государственный университет кинематографии им. С. А. Герасимова.
129226 Москва, ул. Вильгельма Пика, д.3, e-mail: nik_parfenium@mail.ru*

Инвариант одной модели механической системы с вязким трением (сообщение)

Получена 25.07.2014, опубликована 06.12.2014

В результате анализа одной из моделей колебательного контура выявлена особая точка, в которой модуль импеданса не зависит от величины активного сопротивления. Указанная точка располагается на частоте, равной $F_p/\sqrt{2}$ (где F_p — резонансная частота контура при малой величине активного сопротивления). В настоящей работе приведена модель механической системы с вязким трением, описываемая аналогичными уравнениями. В семействе частотных характеристик этой модели также существует точка, где модуль механического сопротивления не зависит от коэффициента вязкого трения. Предполагается применение эффекта в технике электроакустических измерений.

Ключевые слова: модель механической системы, механический резонанс.

В работе [1] сообщалось об особой точке в семействе характеристик одной из моделей колебательного контура. Эта точка, располагается на частоте $\frac{F_p}{\sqrt{2}}$, где F_p — резонансная частота колебательного контура при малой величине активного сопротивления. Модуль импеданса контура на этой частоте не зависит от активного сопротивления контура и равен характеристическому сопротивлению контура, умноженному на $\sqrt{2}$. В работе также определено предельное значение активного сопротивления, выше которого контур не проявляет избирательных свойств.

В настоящей работе построена модель механической системы, частотная характеристика которой имеет аналогичную особую точку — инвариант модуля механического сопротивления для величины вязкого трения. Для соответствия механической модели электрическому контуру был использован метод электромеханических аналогий. Структурная схема механической системы приведена на рис. 1.

Предполагается, что элементы системы располагаются на идеально гладкой горизонтальной поверхности, что позволяет исключить из анализа силы гравитации. Приведенные расчеты предполагают также относительно малые механические перемещения, при которых не изменяются направления действующих сил.

Одно звено системы представляет собой невесомую пружину (с малыми механическими потерями), характеризуемую коэффициентом гибкости C – величиной обратной жесткости.

Второе звено содержит инертную массу M , соответствующую электрической индуктивности L , и последовательно с ней соединенный элемент, обеспечивающий вязкое трение, характеризуемое величиной R . В результате суммарная сила, приложенная к этому звену, будет равна сумме силы Ньютона и силы вязкого трения, а скорости элементов, составляющих это звено, одинаковы.

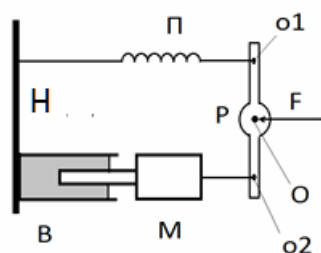


Рис. 1

Схема механической системы с вязким трением.

Π – пружина, $o1$ – шарнир пружины,
 P – невесомый рычаг, O – основной шарнир,
 $o2$ – шарнир второго звена, M – тело
 расчетной массы, B – элемент с вязким
 трением, H – неподвижная стенка

Соответствие системы параллельному электрическому контуру будет достигнуто в случае равенства сил в обоих звеньях (напряжений) и сложения скоростей (токов). Этой цели служит невесомый рычаг P , который может вращаться (без трения) вокруг оси O (рис. 1). Переменная внешняя сила F , приложенная к системе, действует на ось рычага. Невесомость рычага (его малая масса по сравнению с массой второго звена) означает, что к нему могут быть применены следующие уравнения для суммы сил $\sum F = 0$ и моментов $\sum M = 0$. При равенстве плечей рычага силы, приложенные к звеньям, будут равны $F/2$. Скорость перемещения оси при этом может быть вычислена как полусумма скоростей звеньев $V = \frac{V_n + V_m}{2}$, где V_n — скорость звена с пружиной, а V_m — скорость звена с массой. В результате полное механическое сопротивление системы в комплексной форме имеет вид:

$$Z_m = \frac{4}{j\omega C + \frac{1}{R + j\omega M}}, \quad (1)$$

что с точностью до постоянного множителя соответствует электрическому импедансу параллельного электрического контура, построенного по соответствующей эквивалентной схеме.

Это означает, что семейство частотных характеристик механической системы также содержит «особую точку» на частоте $\frac{F_p}{\sqrt{2}}$, где F_p — резонансная частота механической

системы (при малых R), равная $\frac{1}{\sqrt{MC}}$. В этой особой точке модуль механического сопротивления не зависит от коэффициента вязкости и равен $4\sqrt{\frac{2M}{C}}$. На рис. 2 приведено семейство частотных характеристик системы в безразмерных координатах, где абсцисса нормирована по частоте резонанса, а ордината по модулю механического сопротивления в точке стабильности.

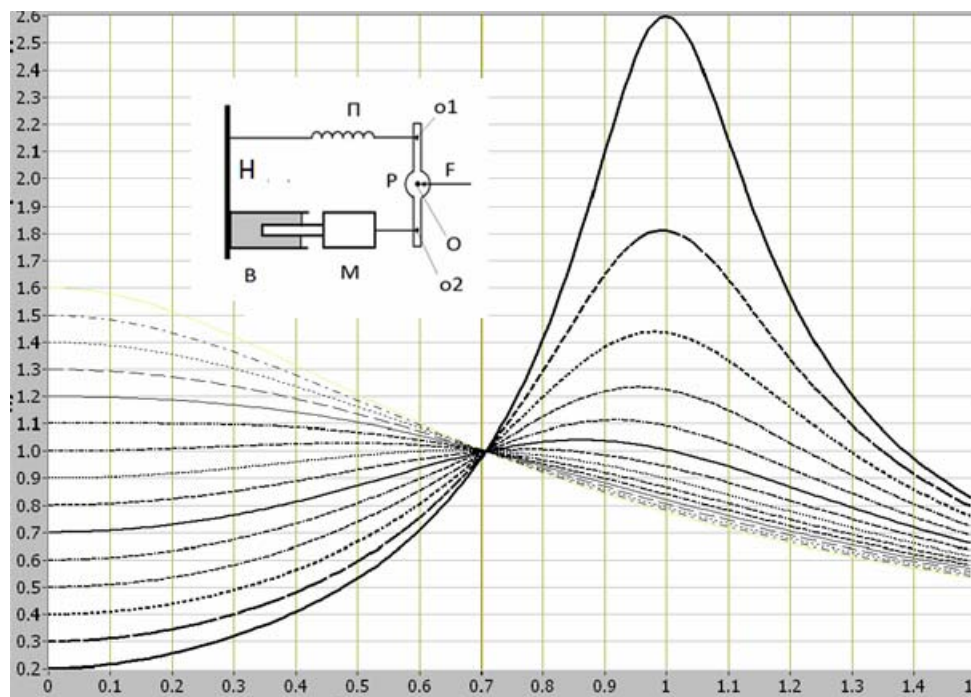


Рис. 2. Зависимость относительного модуля механической системы от частоты при различном относительном коэффициенте вязкости

Как видно из рис. 2, семейство частотных характеристик состоит из резонансных и апериодических кривых, пересекающихся в особой точке. Зависимость нормированного модуля сопротивления системы от частоты вычислялась по формуле

$$|\bar{Z}_m| = \sqrt{\frac{2t^2 + x^2}{4t^2x^2 + 2(1 - x^2)^2}}, \quad (2)$$

где x — отношение частоты к частоте резонанса (при малой вязкости), а t — отношение коэффициента вязкости к механическому сопротивлению системы в точке стабильности, равному $4\sqrt{\frac{2M}{C}}$.

Легко заметить, что относительное значение модуля механического сопротивления равно единице на относительной частоте, равной $\frac{1}{\sqrt{2}}$, при любой относительной вязкости t .

Авторы работы [1], также, как и автор настоящей работы, не нашли физического обоснования существования «точки стабильности». Для электрических контуров обнаруженный эффект позволяет предложить ряд новых методов измерений, основанных на легко реализуемой возможности изменения активного сопротивления контура.

Для приведенной механической системы можно предложить методику, позволяющую различать системы с сосредоточенными и распределенными параметрами. Расчеты показывают, что для последних положение точки стабильности отличается от значения $\frac{Fp}{\sqrt{2}}$. Представленный материал может быть использован в учебных целях в виде лабораторной работы, поскольку охватывает ряд фундаментальных идей механики. Представляется также интересным применение резонансных видов системы, высокое механическое сопротивление которых может быть использовано для акустического подавления помех известной частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Парфентьев Н. А., Парфентьева Е. Н., Севастьянов С. И. Особенности резонанса токов в реальном колебательном контуре, Известия ВУЗОВ, «Электроника», 2014, №5.