

Б. Е. Кангужин*, Д. Б. Нурахметов**,*

* *Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы,
пр. аль-Фараби 71, 050040, Казахстан*

** *Казахский агротехнический университет имени С. Сейфуллина,
Астана, пр. Победы 62, 010011, Казахстан*
kanbalta@mail.ru, dauletkaznu@gmail.com

Идентификация сосредоточенной массы и жесткости пружины на стержне

Получена 11.08.2015, опубликована 08.11.2015

В статье решена задача идентификации сосредоточенной массы и жесткости пружины на неконцевых точках стержня по известным первым двум собственным частотам. Найдены достаточные условия для существования единственного решения задачи идентификации сосредоточенной массы и жесткости пружины на неконцевых точках стержня по известным первым двум собственным частотам. На основании модели рассмотренной в данной статье предложен алгоритм функционирования прибора неразрушающего контроля.

Ключевые слова: собственные частоты, стержень, неразрушающий контроль.

ВВЕДЕНИЕ

Колебательные системы с присоединенными массами изучаются со времен Пуассона, и им посвящено огромное количество работ. Так, например, в [1–4] рассмотрено колебание одномерных континуумов (струна, стержень), плотность которых возмущалась членом вида $M\delta(x)$, где M — величина сосредоточенной массы, δ — функция Дирака. В этих работах, во-первых, показано как влияет на спектр геометрия области, на которой сосредоточена дополнительная масса. Во-вторых, выясняется, как отличается картина поведения собственных частот при больших нагрузках. В-третьих, как показывает эксперимент, «... добавление присоединенной массы может привести к сильной локализации реакции, вызывая большое понижение основной частоты, а также существенное изменение основной формы колебаний» [5]. Эффект локальных колебаний, как нам известно, впервые описал Э. Санчес-Паленсия [6, 7]. В работе [8] исследовались задачи на собственные значения балки, нагруженные сосредоточенными и подвешенными массами.

В последние годы более активно развиваются обратные задачи. Например, такие как ретроспективные, коэффициентные, граничные, геометрические обратные задачи [9]. В работах [10, 11] исследованы задачи диагностирования величин нескольких

сосредоточенных масс по собственным частотам теоретически, а также экспериментально. Большая часть исследовательских работ, выполненных в области акустической диагностики, посвящена восстановлению коэффициентов жесткости, размеров трещин и полостей. Частотные данные широко используют как диагностический инструмент для обнаружения возможных повреждений, которые могли возникнуть в системе в процессе эксплуатации [12–17]. В работе [18] исследован вопрос о том, можно ли по собственным частотам колебаний определить вид и параметры закрепления однородного стержня на обоих его концах. В работе [19] решалась задача идентификации условий закрепления балки по пяти собственным частотам ее колебаний. В отличие от [10–19] в данной работе исследуется задача идентификации сосредоточенной массы и жесткости пружины на неконцевых точках стержня по известным первым двум собственным частотам.

1. ЗАДАЧА О ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ И ПРУЖИНОЙ

Рассматривается стержень с одной сосредоточенной массой m , кг и пружиной с коэффициентом жесткости c , Н м⁻¹. В отличие от [10–12] в данной работе мы находим достаточные условия для существования единственного решения задачи идентификации сосредоточенной массы и жесткости пружины на неконцевых точках стержня по известным первым двум собственным частотам. Масса располагается от левого конца стержня на расстоянии a , упругая связь соответственно на расстоянии b (рис. 1). В результате стержень делится на 3 участка: $-l/2 < x < a - l/2$, $a - l/2 < x < b - l/2$, $b - l/2 < x < l/2$.

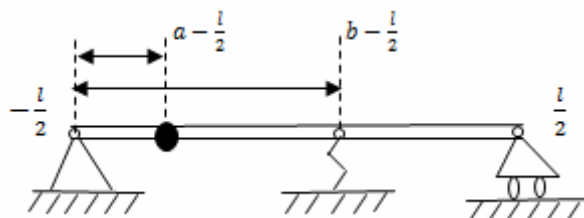


Рис. 1. Стержень с сосредоточенной массой и пружиной

Уравнение свободных поперечных колебаний стержня длины l при $-l/2 < x < l/2$, $t > 0$ записывается в виде

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0,$$

где $w(x,t)$ — поперечное перемещение, м; ρ — плотность материала, кг м⁻³; A — площадь поперечного сечения, м²; E — модуль Юнга, Н м⁻²; J — момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси, м⁴.

Далее рассмотрен шарнирно опертый стержень. Это сделано для определенности. Метод применим и для стержней с другими видами закреплений.

Задача о поперечных колебаниях стержня длины l заменой $w(x, t) = y(x) \sin(\omega t)$ сводится к следующей спектральной задаче:

$$EJy^{(4)}(x) = \omega^2 \rho A y(x), \quad -l/2 < x < l/2, x \neq a-l/2, x \neq b-l/2, \quad (1)$$

$$[EJy^{(3)}(x)]_{x=a-l/2} = -m\omega^2 y(a-l/2), \quad (2)$$

$$[y(x)]_{x=a-l/2} = 0, [Ey^{(1)}(x)]_{x=a-l/2} = 0, \quad (3)$$

$$[EJy^{(2)}(x)]_{x=a-l/2} = 0, [EJy^{(3)}(x)]_{x=b-l/2} = cy(b-l/2), \quad (4)$$

$$[y(x)]_{x=b-l/2} = 0, [Ey^{(1)}(x)]_{x=b-l/2} = 0, \quad (5)$$

$$[EJy^{(2)}(x)]_{x=b-l/2} = 0, y(x)|_{x=-l/2} = 0, \quad (6)$$

$$EJy^{(2)}(x)|_{x=-l/2} = 0, y(x)|_{x=l/2} = 0, EJy^{(2)}(x)|_{x=l/2} = 0, \quad (7)$$

где $[f(x)]_{x=c} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [f(c - \varepsilon) - f(c + \varepsilon)]$

означает скачок функции в точке $x = c$. Обозначим через $p^4 = \omega^2 \rho A / EJ$, где ω — частотный параметр, Гц.

В работе [20] изложен метод получения частот колебаний стержней с кусочно-постоянными характеристиками. Согласно этому методу записывают общие решения уравнений. На каждом из трех участков общее решение имеет четыре неизвестных константы. Две константы, входящие в выражение для общего решения на первом участке, выражают при помощи краевых условий на левом конце. Условия сопряжения при переходе от одного участка к другому позволяют последовательно выразить все константы на любом участке через две константы первого участка, оставшиеся неопределенными. Удовлетворение условий на последнем участке при $x = l/2$ для неопределенных постоянных дает линейную однородную систему алгебраических уравнений, из условия существования ненулевого решения которой следует уравнение частот:

$$\Delta(a, b, l, p, m, c) = \alpha(a, b, l, p)\varphi\psi + \beta(a, l, p)\varphi + \gamma(b, l, p)\psi + \Delta_0(l, p) = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \alpha(a, b, l, p) &= \frac{p}{2} \cos(p(a-b+l))(\operatorname{ch}(p(a+b-l)) - \operatorname{ch}(p(a-b+l))) + \\ &+ \frac{p}{2} \cos(p(a+b-l))(\operatorname{ch}(p(a-b+l)) - \operatorname{ch}(p(a+b-l))) - \\ &- \frac{p}{4} \{\sin(pl)(\operatorname{sh}(p(2b-l)) + \operatorname{sh}(p(2a+l-2b))) + \operatorname{sh}(pl)(\sin(p(2a+l-2b)) - \sin(p(2a-l)))\} + \\ &+ \frac{p}{4} \{\cos(pl)(2\operatorname{ch}(pl) - \operatorname{ch}(p(2b-l)) - \operatorname{ch}(p(2a-l))) + \cos(p(2b-l))(\operatorname{ch}(p(2a-l)) - \operatorname{ch}(pl))\} + \\ &+ \frac{p}{4} \{\cos(p(2a-l))(\operatorname{ch}(p(2b-l)) - \operatorname{ch}(pl)) + \sin(p(2b-l))\operatorname{sh}(pl) + \sin(pl)\operatorname{sh}(p(2a-l))\}; \\ \beta(a, l, p) &= p^4 \{\operatorname{sh}(pl)(\cos(p(2a-l)) - \cos(pl)) + \sin(pl)(\operatorname{ch}(p(2a-l)) - \operatorname{ch}(pl))\}; \end{aligned}$$

$$\gamma(b, l, p) = \operatorname{sh}(pl)(\cos(pl) - \cos(p(2b - l))) + \sin(pl)(\operatorname{ch}(pl) - \operatorname{ch}(p(2b - l)));$$

$$\Delta_0(l, p) = -4p^3 \sin(pl) \operatorname{sh}(pl); \quad \varphi = m/\rho A, \quad \psi = c/EJ.$$

Здесь $\Delta_0(l, p)$ — характеристический определитель при отсутствии массы и пружины, $\Delta_c(b, l, p) = \gamma(b, l, p)\psi + \Delta_0(l, p)$ — характеристический определитель в случае наличия только пружины, $\Delta_m(a, l, p) = \beta(a, l, p)\varphi + \Delta_0(l, p)$ — характеристический определитель в случае наличия только массы. Таким образом, чтобы найти собственные частоты колебаний задачи (1)-(7) сначала определяются значения p из соотношения (8), а затем находим $\omega = p^2 \sqrt{EJ/\rho A}$.

Отметим, что резольвентные представления, которые содержат характеристические определители вида $\Delta(a, b, l, p, m, c)$ для операторов с интегральными граничными условиями, были получены в [21, 22] для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков, а в работе [23] — для оператора Лапласа.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ И КОЭФФИЦИЕНТА ЖЕСТКОСТИ ПРУЖИНЫ ПО НАПЕРЕД ЗАДАНЫМ ЧАСТОТАМ КОЛЕБАНИИ

Рассмотрим основную обратную задачу. Пусть нам известны все физические параметры, место положения сосредоточенной массы и пружины, а также первые две собственные частоты поперечных колебаний стержня. Требуется определить величину сосредоточенной массы и коэффициент жесткости пружины.

Пусть p_1, p_2 являются нулями $\Delta(p) := \Delta(a, b, l, p, m, c)$. Тогда справедливы два равенства

$$\begin{cases} \alpha_1 \psi \varphi + \beta_1 \varphi + \gamma_1 \psi + \Delta_{01} = 0, \\ \alpha_2 \psi \varphi + \beta_2 \varphi + \gamma_2 \psi + \Delta_{02} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $\alpha_i = \alpha(a, b, l, p_i)$, $i = 1, 2$. Аналогичные обозначения верны для β, γ, Δ_0 . Для матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \Delta_{01} \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \Delta_{02} \end{pmatrix}$ справедливы следующие соотношения Пюккера

$$N_1 N_4 - N_2 N_5 + N_3 N_6 = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } N_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}, \quad N_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad N_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \Delta_{01} \\ \alpha_2 & \Delta_{02} \end{vmatrix}, \quad N_4 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \Delta_{01} \\ \gamma_2 & \Delta_{02} \end{vmatrix}, \quad N_5 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \Delta_{01} \\ \beta_2 & \Delta_{02} \end{vmatrix},$$

$$N_6 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad (\text{см. [15, с. 33]}).$$

Система нелинейных уравнений (9) сводится к системе квадратных уравнений

$$\begin{cases} N_1\varphi^2 + (N_3 - N_6)\varphi + N_4 = 0, \\ N_2\psi^2 + (N_3 + N_6)\psi + N_5 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Заметим, что между φ, ψ также справедлива линейная связь

$$N_1\varphi + N_2\psi + N_3 = 0. \quad (12)$$

Для дискриминантов D_φ, D_ψ системы квадратных уравнений справедливо $D_\varphi - D_\psi = 0$, так как $D_\varphi = (N_3 - N_6)^2 - 4N_1N_4$, $D_\psi = (N_3 + N_6)^2 - 4N_2N_5$. Пусть $D_\varphi = D_\psi \geq 0$. Тогда первое уравнение имеет вещественные корни. Для того чтобы квадратное уравнение имело единственный положительный корень, достаточно выполнение неравенства

$$\text{sgn}(N_1)\text{sgn}(N_4) < 0. \quad (13)$$

Выбрав положительное φ , из (12) находим ψ . В этом случае неравенство

$$-2N_2N_3 + N_2(N_3 - N_6) - N_2\sqrt{(N_3 - N_6)^2 - 4N_1N_4} \geq 0 \quad (14)$$

гарантирует существование положительного значения ψ .

В результате получаем, что если $D_\varphi = D_\psi \geq 0$, а также выполнены условия (13) и (14), то решение обратной задачи определения пары φ и ψ по двум собственным частотам – единственно. Так как $\varphi = m/\rho A, \psi = c/EJ$, то мы определяем единственным образом величину сосредоточенной массы m , кг и коэффициент жесткости пружины $c, \text{Н м}^{-1}$.

3. ПРИМЕРЫ

Для примеров 1 и 2, рассматриваемых далее, экспериментальная модель состоит из стального (сталь 60 ГОСТ 1050-88) стержня с радиусом 0,01 м, длиной 6 м и шарнирно оперта на концах. Тогда $\rho = 7800 \text{ кг м}^{-3}$, $EJ = 1649,34 \text{ Н м}^2$, $A = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

На этих двух примерах мы продемонстрируем важность найденных достаточных условия для определения сосредоточенной массы m , кг и коэффициента жесткости пружины $c, \text{Н м}^{-1}$ по двум собственным частотам. В первом примере величины сосредоточенной массы и коэффициента жесткости пружины определяются однозначно, а во втором примере – неоднозначно.

Пример 1

Для наглядности сначала приведем результаты решения прямой задачи в таблице 1 и обратной задачи — в таблице 2.

Таблица 1. Аналитические частоты для стержня с сосредоточенной массой и пружиной

m	c	a	b	ω_1	ω_2
0,3	8	1	2	7,13	28,04

Таблица 2. Определение величины сосредоточенной массы и коэффициента жесткости пружины

ω_1	ω_2	a	b	c	m
7,13	28,04	1	2	7,478	0,298
				-17604,045	299,076

Согласно таблице 1 данным собственным частотам $\omega_1 = 7,13$ Гц и $\omega_2 = 28,04$ Гц соответствуют $m = 0,298$ кг и $c = 7,478$ Н м⁻¹. Относительные погрешности составляют $\delta_c = 6,9\%$ и $\delta_m = 0,7\%$. Такие отклонения допустимы при решении практических задач. В работах [11, 15] отклонения от точных массовых параметров составили 2,4 – 13,4% от реальной массы. Заметим, что для вычисления собственных частот задачи (1)–(7) точность достаточно взять $\varepsilon = 0,1$. Здесь ε означает, что при фиксированных значениях a, b, l, m и c выполняется условие $|\Delta(a, b, l, \omega_i, m, c)| < \varepsilon, i = 1, 2$.

В данном примере $N_1 = -62,146$, $N_2 = -708,513$, $N_3 = 11,045$, $N_4 = -927,535$, $N_5 = 36,695$, $N_6 = -7572,796$.

$N_1 N_4 - N_2 N_5 + N_3 N_6 = 0$, $\text{sgn}(N_1) \text{sgn}(N_4) > 0$, но $\text{sgn}(N_2) \text{sgn}(N_5) < 0$.

Также выполняется условие

$$-2N_1 N_3 + N_1(N_3 + N_6) - N_1 \sqrt{(N_3 + N_6)^2 - 4N_2 N_5} \geq 0.$$

Следовательно, величины сосредоточенной массы и коэффициента жесткости пружины определяются однозначно (отрицательное значение не удовлетворяет физическому смыслу задачи).

Пример 2

Таблица 3. Определение величины сосредоточенной массы и коэффициента жесткости пружины

ω_1	ω_2	a	b	c	m
7,19	28,31	0,5	3,5	9,958	0,303
				4240,059	149,782

Из таблицы 3 видно, что величины сосредоточенной массы и коэффициента жесткости пружины определяются неоднозначно.

В данном примере $N_1 = -56,506$, $N_2 = 1343,276$, $N_3 = -1,226$, $N_4 = -422,688$, $N_5 = 20,941$, $N_6 = -3460,721$.

$N_1 N_4 - N_2 N_5 + N_3 N_6 = 0$, $\text{sgn}(N_1)\text{sgn}(N_4) > 0$ и $\text{sgn}(N_2)\text{sgn}(N_5) > 0$. Следовательно, величины сосредоточенной массы и коэффициента жесткости пружины определяются неоднозначно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдены достаточные условия для существования единственного решения задачи идентификации сосредоточенной массы и жесткости пружины на неконцевых точках стержня по известным двум собственным частотам. Показано, что в общем случае эта обратная задача имеет два решения. Такие задачи возникают при использовании методов вибродиагностики относящиеся к методам неразрушающего контроля.

На основании модели рассмотренной в данной статье можно создать прибор неразрушающего контроля, функционирующий по следующей схеме. Пусть сосредоточенная масса и пружина находятся в части стержня, доступ к которым затруднен по техническим причинам или для обеспечения доступа требуются значительные временные и материальные затраты. Определим величин сосредоточенной массы и коэффициента жесткости пружины находящийся в «недоступной» части стержня по известным двум собственным частотам. Для этого, во-первых, необходимо проверить выполнение условий (13), (14). Во-вторых, используя предоставленную информацию для первых двух собственных частот полученной конструкции вычислить неизвестные величины сосредоточенной массы и коэффициента жесткости пружины.

Эти результаты также могут быть применены для выбора закрепления промежуточных элементов, при котором колебания стержня имели бы нужный (безопасный) спектр частот.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект 2217/ГФЗ МОН РК).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. Л.: Изд. АН СССР, 1932.
2. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.: Гос. изд. тех.-теорет. лит-ры, 1950.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
4. Головатый Ю. Д. Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами // Труды ММО. Т. 54. С. 29-72. 1992.

5. Христенко А. С., Колебания непологих оболочек, нагруженных распределенными и сосредоточенными массами // Изв. АН СССР сер. Мех. тв. тела. № 4. С. 116-122. 1972.
6. Sanchez-Palencia E. Perturbation of Eigenvalues in Thermoelasticity and Vibration of Systems with Concentrated Masses // Trends and Applications of pure Mathematics to Mechanics. Lecture Notes in Physics. 195. Springer-Verlag Berlin. P. 346-368. 1984.
7. Sanchez-Palencia E., Tchatat H. Vibration de systèmes élastiques avec des masses concentrées // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. V. 42. P. 43-63. 1984.
8. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наук, 1968.
9. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007.
10. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р. Диагностирование двух масс, сосредоточенных на балке // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. № 1. С. 42-44. 2010.
11. Morassi A., Dilella M. On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements // Inverse Problems in Engineering. V. 10. P. 183-201. 2002.
12. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р. О решении обратной задачи по восстановлению сосредоточенных масс по собственным частотам // Электронный журнал «Техническая акустика». 2009. Т. 12. <http://www.ejta.org>
13. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р. Определение полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия. № 5. С. 29-33. 2010.
14. Ахтямов А. М., Урманчиев С. Ф. Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний // Сибирский журнал индустриальной математики. Т. 11. № 4. С. 19-24. 2008.
15. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009.
16. Ильгамов М. А., Хакимов А. Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. № 6. С. 83-89. 2009.
17. Гладвелл Г. М. Л. Обратные задачи теории колебаний. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008.
18. Ахтямов А. М., Ямилова Л. С., Муфтахов А. В. Идентификация вида и параметров закрепления стержня по собственным частотам его колебаний // Акустический журнал. Т. 45. № 2. С. 181-188. 2008.
19. Ахтямов А. М., Муфтахов А. В., Ахтямова А. А. Об определении закрепления и нагруженности одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. Вып. 3. С.114-129. 2013.
20. Вибрация в технике: Справочник. Т. 1. Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978.

21. Кангужин Б. Е., Нурахметов Д. Б., Токмагамбетов Н. Е. Аппроксимативные свойства системы корневых функций, порождаемые корректно разрешимыми краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков // Уфимский матем. журнал. Т. 3. № 3. С. 80-92. 2011.
22. Ахымбек М. Е., Нурахметов Д. Б. Первый регуляризованный след оператора двукратного дифференцирования на проколоте отрезке // Сибирские электронные математические известия. Т. 11. С. 626-633. 2014.
23. Кангужин Б. Е., Аниязов А. А. Корректные задачи для оператора Лапласа в проколоте области // Матем. заметки. Т. 86. № 6. С. 856-867. 2011.