

С. С. Воронков

Псковский государственный университет

Россия, 180000, г. Псков, пл. Ленина, 2, e-mail: voronkovss@yandex.ru

О нарушении линейного закона Гука при возникновении турбулентности

Получена 26.10.2015, опубликована 17.11.2015

Получено аналитическое выражение уточненного закона Гука для газов, связывающего изменение давления с изменением плотности. Установлено влияние акустических возмущений плотности на устойчивость ламинарного режима течения вязкого теплопроводного газа в плоском канале. Это влияние учитывается через нелинейную добавку давления, входящую в уточненный закон Гука и порождающую поперечные градиенты давления в канале. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: закон Гука, турбулентность, вязкий теплопроводный газ.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема возникновения турбулентности привлекает внимание инженеров и ученых с конца XIX века, но окончательного решения пока не получено. Вот что пишет по этому поводу известный исследователь турбулентности В. В. Струминский [1]: «Другие важные исследования, начатые также еще Рейнольдсом, относятся к проблемам устойчивости течения как проблеме возникновения турбулентности. Выводы линейной теории устойчивости только качественно соответствуют экспериментам Шубауэра и Скрэмстеда. Расчеты критических чисел Рейнольдса по линейной теории приводят к значениям, которые почти на два порядка отличаются от экспериментальных. Начатые исследования по применению нелинейной теории пока далеки от завершения». В работах Власова, Гиневского, Полякова, Качанова, Козлова, Левченко [2, 3, 4] и др. установлено влияние акустических возмущений на возникновение турбулентности в пограничном слое, но неясен механизм воздействия. Рассмотрим эти факты с позиции установленного в работах автора нарушения линейного закона Гука, связывающего изменение давления с относительной объемной деформацией [5].

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Полученная в работе [6] формула для скорости звука в вязком теплопроводном газе с учетом диссипации энергии и теплообмена свидетельствует о нарушении линейного закона Гука, связывающего изменение давления с относительной объемной деформацией, что является причиной возникновения турбулентности. Покажем это. Получим уточненный закон Гука.

Формула для скорости звука в потоке вязкого теплопроводного газа с учетом диссипации энергии и теплообмена запишется [6]:

$$a^2 = a_s^2 + \frac{\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad} \rho - \text{grad} p) + (k-1)\Phi}{\frac{\partial \rho}{\partial t}}, \quad (1)$$

где a_s — адиабатное и изоэнтропное значение скорости звука; p, ρ — давление и плотность газа; Φ — функция, учитывающая диссипацию энергии и теплообмен

$$\Phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) +$$

$$+ \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\};$$

T — температура газа; \mathbf{V} — вектор скорости газа с проекциями u, v, w на оси декартовой системы координат x, y, z соответственно; λ — коэффициент теплопроводности; μ — коэффициент динамической вязкости; t — время; k — показатель адиабаты.

Традиционно считается, что сжимаемость газов достаточно точно описывается линейным приближением, согласно которому изменение давления связано с относительной объемной деформацией законом Гука

$$dp = -E \frac{dV}{V} = -E \frac{dv}{v} = E \frac{d\rho}{\rho}, \quad (2)$$

где: p — давление, E — модуль объемной упругости газа, V, v, ρ — объем, удельный объем, плотность газа соответственно. Модуль объемной упругости E представляет собой коэффициент пропорциональности.

Помимо модуля упругости газа для характеристики сжимаемости используют также коэффициент сжимаемости и скорость звука, которые следующим образом связаны между собой:

$$\beta = \frac{1}{E}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (3)$$

где: β — коэффициент сжимаемости, a — скорость звука, ρ — плотность.

Подставляя выражение для модуля объемной упругости через скорость звука (3) в (2), для закона Гука получим

$$dp = E \frac{d\rho}{\rho} = a^2 d\rho. \quad (4)$$

Запишем уточненный закон Гука как сумму линейной и нелинейной составляющих, подставляя выражение для скорости звука (1) в (4):

$$dp = dps + dpn = a_s^2 d\rho + (\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad}\rho - \text{grad}p) + (k-1)\Phi) dt, \quad (5)$$

где $dps = a_s^2 d\rho$ — линейная составляющая изменения давления в законе Гука, $dpn = (\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad}\rho - \text{grad}p) + (k-1)\Phi) dt$ — нелинейная составляющая изменения давления в уточненном законе Гука.

Из выражения (5) следует, что в потоке вязкого газа с поперечным сдвигом нарушается линейный закон Гука изменения давления в зависимости от изменения плотности. Так как нелинейная добавка в уточненном законе Гука (5) является локальной функцией параметров потока, малые возмущения плотности будут приводить к непропорциональным изменениям давления, порождающим турбулентные пульсации.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В качестве математической модели при проведении вычислительного эксперимента принята модель, подробно описанная в [6]. Это уравнения: неразрывности, Навье-Стокса в проекциях на оси x и y , энергии и состояния. В этой системе из пяти уравнений неизвестных 5 величин: p, ρ, T, u, v — давление, плотность, температура, проекции скорости потока на оси x и y . Моделируется распространение возмущения плотности в ламинарном потоке вязкого теплопроводного газа в плоском канале с параболическим профилем скорости — рис. 1.

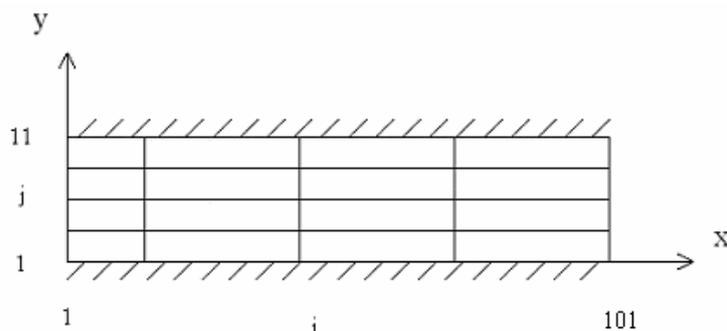


Рис. 1. Плоский канал. i — номер узла конечно-разностной сетки по оси x ; j — номер узла конечно-разностной сетки по оси y

Количество узлов конечно-разностной прямоугольной сетки по оси y принимается 11, количество узлов по оси x — 101. Шаг конечно-разностной сетки принимается равномерным по осям x и y : $\Delta x = \Delta y = 10^{-3}$ м. Шаг по времени определялся из условия устойчивости и принимался равным $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$ с. Численное решение системы конечно-разностных уравнений осуществлялось по двухшаговой схеме Браиловской, описанной в [6].

Дополнительно анализировался закон изменения нелинейной добавки dpr в уточненном законе Гука — выражение (5) — рис. 2

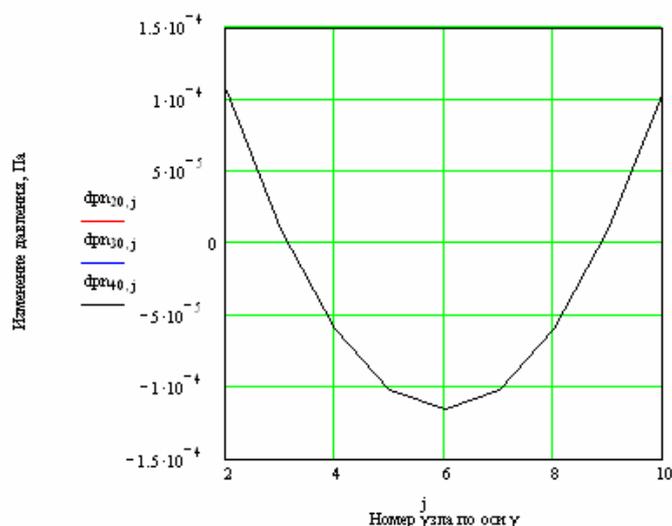


Рис. 2. Изменение нелинейной добавки давления dpr по сечению канала при различных $i=20, 30, 40$; амплитуда возмущения плотности составляла $\rho_{amp} = 10^{-10}$ кг/м³; максимальная скорость потока на оси канала $Um = 10$ м/с

Анализ полученного закона изменения нелинейной добавки dpr по сечению канала показывает, что закон близок к параболическому и при малых амплитудах возмущения плотности одинаков в различных сечениях канала. Закон изменения dpr в этом случае определяется параметрами потока в установившемся течении — значениями градиентов скоростей, давлений, плотности и температур. При увеличении максимальной скорости потока на оси канала изменение размаха нелинейной добавки давления dpr (разность между значениями dpr в точках $j=2$ и $j=6$ — рис. 2) увеличивается по следующему закону — рис. 3

Анализ полученной зависимости на рис. 3 показывает, что при увеличении скорости потока увеличивается и нелинейная добавка dpr в уточненном законе Гука — выражение (5).

В вычислительном эксперименте анализировалось влияние гармонического акустического возмущения плотности на входе в канал на устойчивость ламинарного потока. Возмущение плотности задавалось на входе по всему сечению канала в виде $\rho_{amp} \cdot \cos(2\pi n / NTP)$, где n — шаг по времени (количество шагов в приведенном расчете принималось 100), $NTP=40000$ — период возмущения, соответствующий

частоте 12,5 Гц. Число Рейнольдса составляло 2205. На последующих рисунках приводится сравнение двух режимов при значениях амплитуды возмущения плотности $\rho_{amp} = 10^{-4}$ кг/м³ и при отсутствии возмущения $\rho_{amp} = 0$.

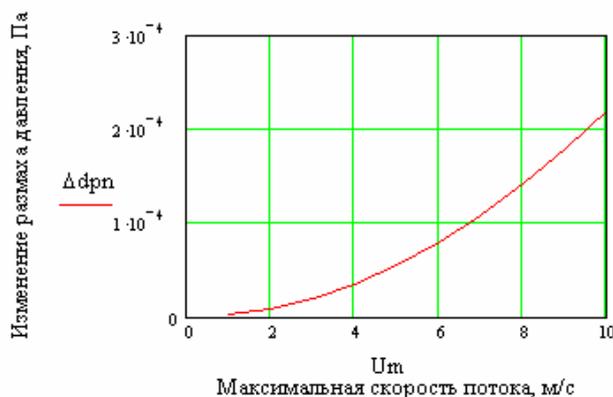


Рис. 3. Изменение размаха нелинейной добавки давления $d_{пр}$

На рисунке 4 в сечениях $i=60-80$ наблюдается возникновение пульсаций давления по длине канала. Из сравнения рисунков 4-5 и рисунков 6-7 следует, что акустические возмущения плотности порождают пульсации давления как вдоль канала — рис. 4, так и поперек — рис. 6. Как следует из сравнения рисунков 8-9, профиль скорости по сечению канала практически не изменился и остается параболическим. На рисунке 10 в сечениях $i=60-80$ наблюдается возникновение поперечной составляющей скорости v по длине канала под действием возмущения плотности, в отличие от рис. 11, где возмущение плотности отсутствует. Из сравнения рисунков 12-13 отчетливо видно: под действием возмущения плотности на рисунке 12 в сечениях $i=60-80$ наблюдается возникновение пульсаций нелинейной добавки давления $d_{пр}$ по длине канала. Как следует из сравнения рисунков 14-15, параболический закон изменения нелинейной добавки давления $d_{пр}$ по сечению канала нарушается при $i=65-70$ и возникают пульсации $d_{пр}$ по сечению канала — рис. 14. Из рисунка 16 следует, в отличие от рис. 17, что создание возмущения плотности на входе порождает в поперечном сечении канала ($i=10$) между точками $j=2$ и $j=3$ градиент давления значительной величины $\Delta p = 1$ Па и вызывающий пульсации потока в поперечном направлении — составляющая скорости v на рис. 10.

Проведенный вычислительный эксперимент свидетельствует о влиянии акустических возмущений плотности на устойчивость ламинарного режима течения вязкого теплопроводного газа в плоском канале. Это влияние осуществляется через нелинейную добавку давления $d_{пр}$, входящую в уточненный закон Гука (5), и порождающую поперечные градиенты давления в канале.

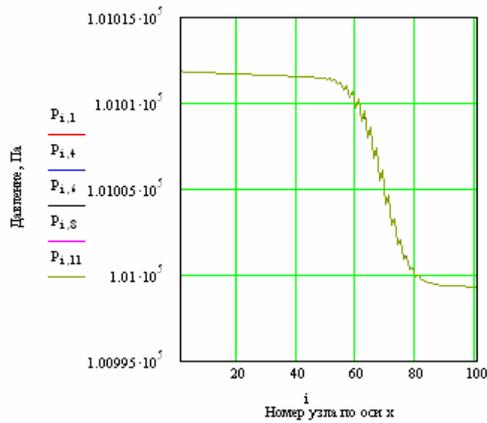


Рис. 4. Изменение давления по длине канала в момент времени $n = 100$, $\rho\tau p = 10^{-4} \text{ кг/м}^3$

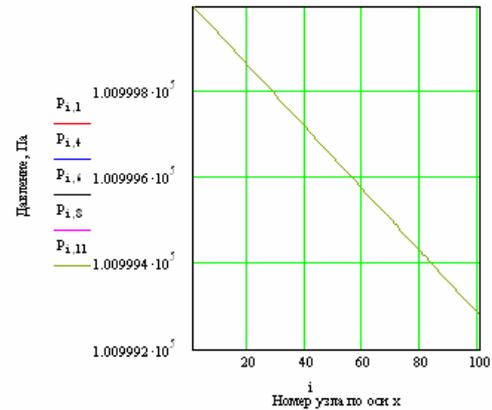


Рис. 5. Изменение давления по длине канала в момент времени $n = 100$, $\rho\tau p = 0$

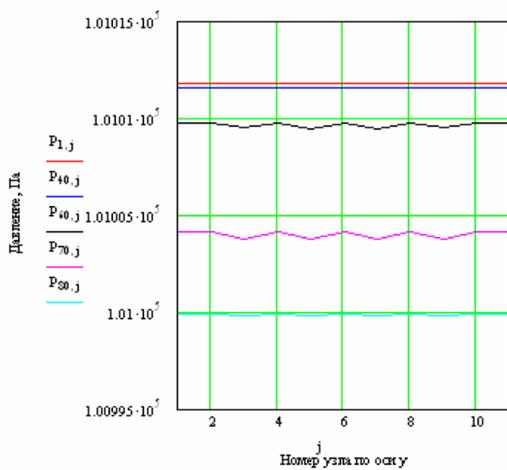


Рис. 6. Изменение давления по сечению канала в момент времени $n = 100$, $\rho\tau p = 10^{-4} \text{ кг/м}^3$

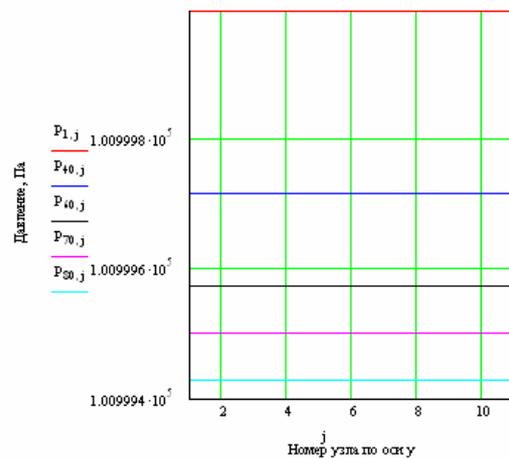


Рис. 7. Изменение давления по сечению канала в момент времени $n = 100$, $\rho\tau p = 0$

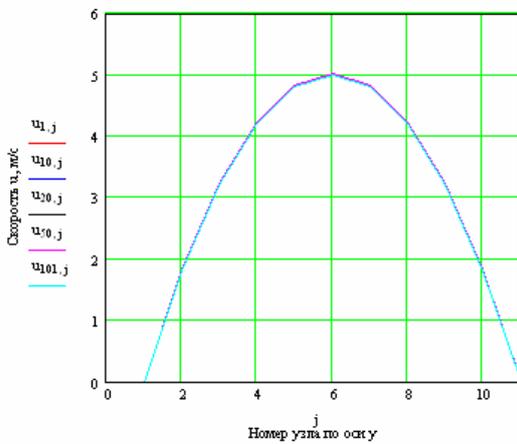


Рис. 8. Изменение скорости u по сечению канала в момент времени $n = 100$, $\rho\tau p = 10^{-4} \text{ кг/м}^3$

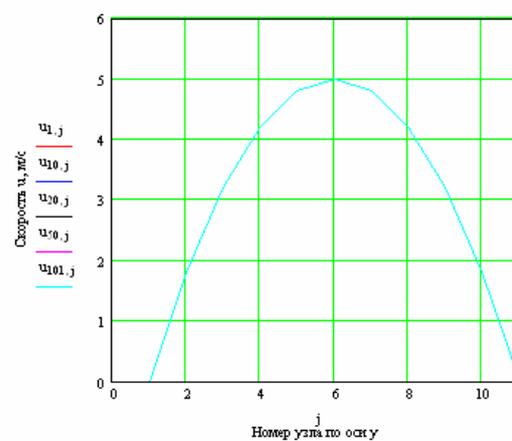


Рис. 9. Изменение скорости u по сечению канала в момент времени $n = 100$, $\rho\tau p = 0$

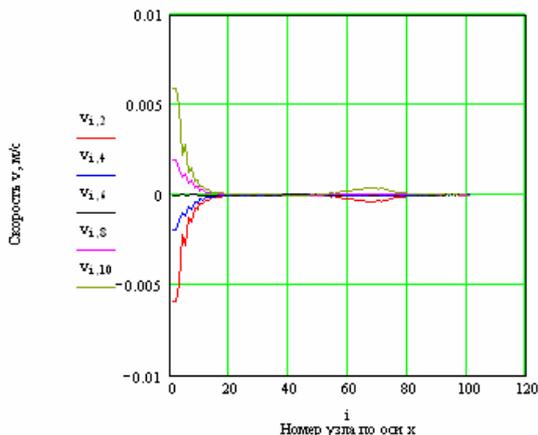


Рис. 10. Изменение скорости v по длине канала в момент времени $n = 100$, $\rho\tau p = 10^{-4} \text{ кг/м}^3$

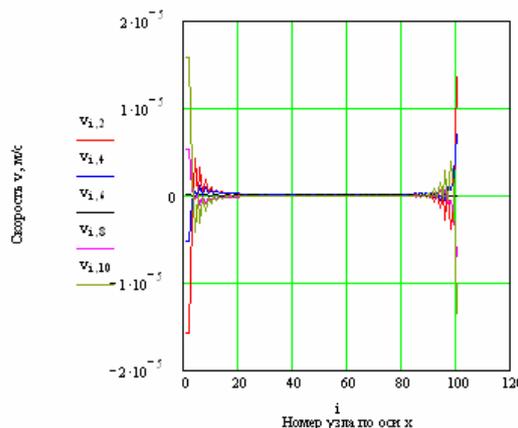


Рис. 11. Изменение скорости v по длине канала в момент времени $n = 100$, $\rho\tau p = 0$

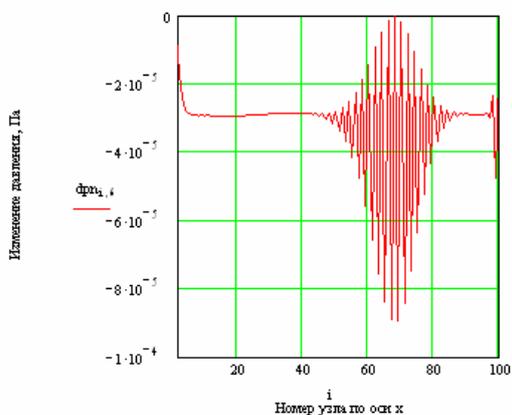


Рис. 12. Изменение нелинейной добавки давления dpn по длине канала в сечении $j=6$ в момент времени $n = 100$, $\rho\tau p = 10^{-4} \text{ кг/м}^3$

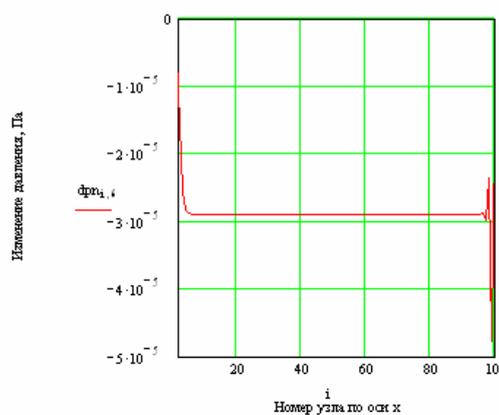


Рис. 13. Изменение нелинейной добавки давления dpn по длине канала в сечении $j=6$ в момент времени $n = 100$, $\rho\tau p = 0$

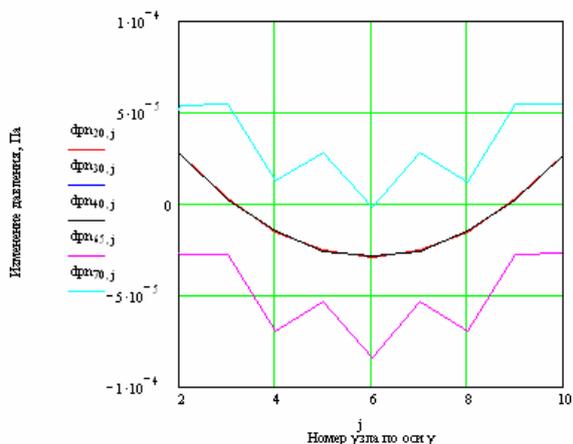


Рис. 14. Изменение нелинейной добавки давления dpn по сечению канала в момент времени $n = 100$, $\rho\tau p = 10^{-4} \text{ кг/м}^3$

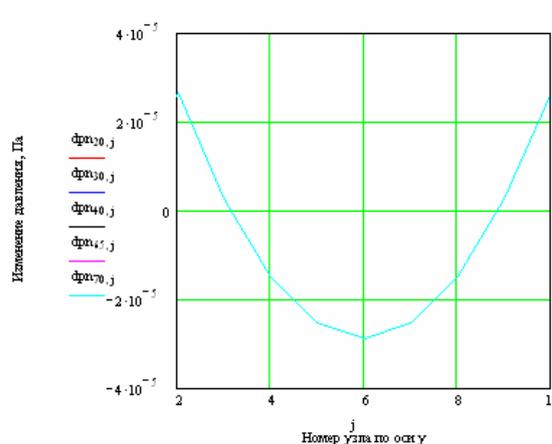


Рис. 15. Изменение нелинейной добавки давления dpn по сечению канала в момент времени $n = 100$, $\rho\tau p = 0$

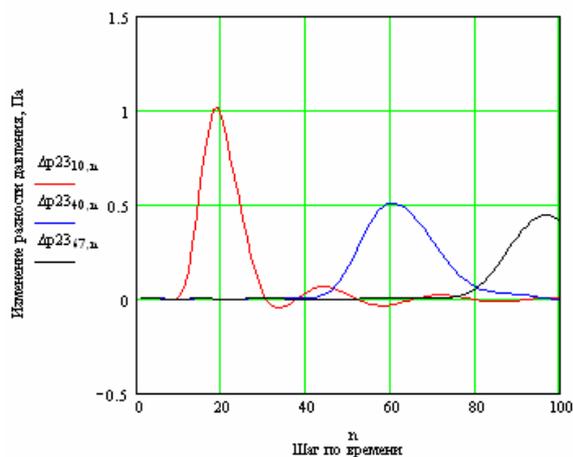


Рис. 16. Изменение разности давлений в точках $j=2$ и $j=3$ во времени в фиксированном сечении канала $i=10,40,67$; $\rho_{amp} = 10^{-4} \text{ кг/м}^3$

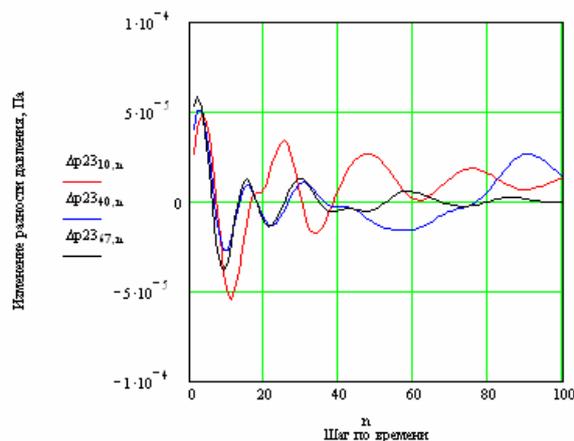


Рис. 17. Изменение разности давлений в точках $j=2$ и $j=3$ во времени в фиксированном сечении канала $i=10,40,67$; $\rho_{amp} = 0$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Получено аналитическое выражение для уточненного закона Гука, связывающего изменение давления с изменением плотности в потоке вязкого теплопроводного газа.
- Проведенный вычислительный эксперимент свидетельствует о влиянии акустических возмущений плотности на устойчивость ламинарного режима течения вязкого теплопроводного газа в плоском канале. Это влияние учитывается через нелинейную добавку давления, входящую в уточненный закон Гука и порождающую поперечные градиенты давления в канале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турбулентные течения: труды Всесоюзной школы по проблемам турбулентных течений жидкостей и газов, 25-29 декабря 1974 г. Звенигород / Б. Д. Хахалин, В. И. Семко, А. Н. Смоляков и др.; Отв. ред. В. В. Струминский. — М.: Наука, 1977. — 252 с.
2. Власов Е. В., Гиневский А. С. Влияние акустических возмущений на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный. — Учен. Зап. ЦАГИ, 1971, т. II, № 2, с. 1-10.
3. Поляков Н. Ф. Индуцирование гидродинамических волн в ламинарном пограничном слое продольным звуковым полем. — В кн.: Симпозиум по физике акустико-гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1975, с. 216-223.
4. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. — Новосибирск: Наука, 1982. — 151 с.
5. Воронков С. С. О модуле упругости вязкого теплопроводного газа. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2010, 4.
6. Воронков С. С. О скорости звука в потоке вязкого газа с поперечным сдвигом. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2004, 5.