

С. С. Воронков

Псковский государственный университет

Россия, 180000, г. Псков, пл. Ленина, 2, e-mail: voronkovss@yandex.ru

О законе возникновения турбулентности в вязком теплопроводном газе

Получена 20.11.2016, опубликована 06.12.2016

Показано, что полученный уточненный закон Гука для вязкого теплопроводного газа фактически представляет собой закон, описывающий возникновение турбулентности в этой среде. Отмечается, что при анализе возникновения турбулентности в пограничном слое необходимо учитывать сжимаемость среды и диссипацию энергии в потоке. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: турбулентность, вязкость, закон возникновения турбулентности, вязкий теплопроводный газ.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема возникновения турбулентности на протяжении многих десятилетий привлекает внимание ученых и инженеров, так как понимание механизма возникновения турбулентности позволит повысить точность расчетов инженерных систем и оборудования. Эта проблема далека от своего разрешения и требует дополнительных исследований. Полученный в работах автора уточненный закон Гука для вязкого теплопроводного газа позволяет по иному взглянуть на механизм возникновения турбулентности.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Полученный в работе [1] уточненный закон Гука для вязкого теплопроводного газа фактически представляет собой закон, описывающий возникновение турбулентности в этой среде. Покажем это. Выпишем уточненный закон Гука [1]:

$$dp = dps + dpn = a_s^2 d\rho + \left(\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad} \rho - \text{grad} p) + (k-1)\Phi \right) dt, \quad (1)$$

где $dps = a_s^2 d\rho$ — линейная составляющая изменения давления в законе Гука; $dpn = \left(\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad} \rho - \text{grad} p) + (k-1)\Phi \right) dt$ — нелинейная составляющая изменения давления в уточненном законе Гука; a_s — адиабатное и изоэнтропное значение скорости звука; p, ρ — давление и плотность газа; Φ — функция, учитывающая диссипацию энергии и теплообмен:

$$\Phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) +$$

$$+ \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\};$$

T — температура газа; \mathbf{V} — вектор скорости газа с проекциями u , v , w на оси декартовой системы координат x , y , z соответственно; λ — коэффициент теплопроводности; μ — коэффициент динамической вязкости; t — время; k — показатель адиабаты.

Этот закон следует непосредственно из уравнения для давления в вязком теплопроводном газе, полученного в работе [2],

$$\frac{dp}{dt} - a_s^2 \frac{d\rho}{dt} = (k-1)\Phi. \quad (2)$$

Полные производные в уравнении (2) представляют собой сумму локальной и конвективной производных и расписываются:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \text{grad} p, \quad (3)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \text{grad} \rho. \quad (4)$$

Из уравнения (2), и соответственно, из закона возникновения турбулентности (1) следует, что в вязком теплопроводном газе при возникновении градиентов скорости, например, в пограничном слое, в струйных течениях и др., будут возникать пульсации давления, порождающие турбулентность.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Приведем математическую модель, описывающую процесс возникновения турбулентности в вязком теплопроводном газе в трехмерной постановке, включающую:

1. Уравнение неразрывности [3]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \mathbf{V} = 0. \quad (5)$$

2. Уравнение Навье-Стокса в проекциях на оси x , y , z [3, 4]

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \text{div} \mathbf{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \quad (6)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \quad (7)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) \right]. \quad (8)$$

3. Уравнение энергии [5]

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{V} = \Phi, \quad (9)$$

где $de = c_v dT$, c_v — изохорная теплоемкость.

4. Уравнение состояния для совершенного газа

$$p = \rho RT, \quad (10)$$

где R — газовая постоянная.

В этой системе из шести уравнений неизвестных 6 величин: p, ρ, T, u, v, w , (при условии, что $\mu = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$).

Для повышения точности численных расчетов в качестве неизвестных используются консервативные переменные [4]: $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$, а также температура T и давление p . Систему уравнений (5–10) удобно записать в векторном виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

где векторы U, F, G, D представляют собой упорядоченные наборы комбинаций основных переменных [4].

Численное решение системы уравнений (11) осуществлялось по двухшаговой схеме Браиловской [4]

$$U^{n+1} = U^n - \left[\frac{\delta F^n}{\delta x} + \frac{\delta G^n}{\delta y} + \frac{\delta D^n}{\delta z} \right] \Delta t, \quad (12)$$

$$U^{n+1} = U^n - \left[\frac{\delta F_I^{n+1}}{\delta x} + \frac{\delta F_V^n}{\delta x} + \frac{\delta G_I^{n+1}}{\delta y} + \frac{\delta G_V^n}{\delta y} + \frac{\delta D_I^{n+1}}{\delta z} + \frac{\delta D_V^n}{\delta z} \right] \Delta t, \quad (13)$$

где I и V — индексы соответственно невязких и вязких членов функций F, G и D ; $\frac{\delta}{\delta x}$,

$\frac{\delta}{\delta y}$ и $\frac{\delta}{\delta z}$ представляются центральными разностями, $F_I^{n+1} = F_I(U^{n+1})$ и т. д.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Процесс возникновения турбулентности в пограничном слое или процесс перехода к турбулентности ламинарного режима течения состоит из ряда более простых процессов, последовательно сменяющих друг друга. Эти процессы в настоящее время достаточно хорошо изучены экспериментально и их интерпретация в различных научных школах отличается незначительно. Приведем интерпретацию процесса перехода в пограничном слое, данную в работе [6]: «Таким образом, процесс перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентное состояние при малой интенсивности внешних возмущений состоит из трех условно разделяемых этапов: генерации волн пограничного слоя, их усиления по законам линейной теории и нелинейного разрушения ламинарного режима течения. Каждому этапу в перечисленной последовательности соответствует характерная область в пространстве по мере возрастания расстояния от передней кромки модели. Отметим, что последняя, нелинейная, область развития процесса перехода относительно малопротяжена, и характер ее в значительной степени определяется свойствами исходного течения, внешних возмущений и процессами, происходящими в предыдущих двух областях». Предлагаемая в работе [6] последовательность стадий перехода схематически приведена на рис. 1.

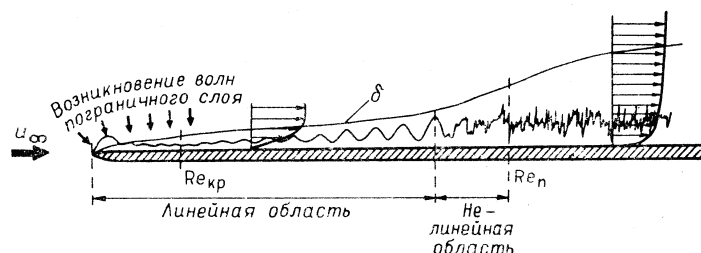


Рис. 1. Схема основных стадий процесса перехода в пограничном слое.
Рисунок взят из работы [6]

В работе [7] дается следующая последовательность стадий перехода в пограничном слое: «С увеличением расстояния по x мы наблюдаем последовательно следующие стадии: область слабых двумерных колебаний, область смешанных двух- и трехмерных колебаний, появление продольных вихрей и переход к турбулентному течению». Появление продольных вихрей в пограничном слое было установлено в экспериментах Клебанава и др. [7] — рис. 2.

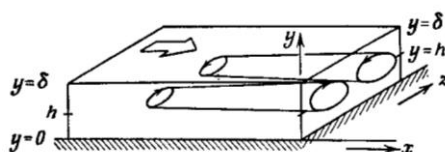


Рис. 2.
Стационарные продольные вихри, возникающие при колебаниях в пограничном слое и обусловленные нелинейными явлениями (по измерениям Клебанава). Рисунок взят из работы [7]

Установлено, что появляется завихренность в направлении оси x , которая периодически меняется по оси z . С ростом координаты x размер стационарных продольных вихрей увеличивается, и в основном течении появляются компоненты скорости $v(x,y,z)$ и $w(x,y,z)$, как показано на рис. 2. Направление вращения продольных вихрей противоположно друг другу.

Как отмечает Драйден [8]: «Проблема перехода есть не что иное, как проблема возникновения турбулентности и, в настоящее время еще не ясно, можно ли из всего многообразия проявлений начала турбулентности выделить какой-то один процесс, считая его основным. Различные исследователи пытались применять различные подходы в поисках той основной идеи или того ключевого принципа, который мог бы открыть двери к пониманию данного явления. Было много споров относительно возможности решения этой проблемы с помощью линейных теорий; особенно широкая полемика касалась роли и значения линеаризованной теории неустойчивости ламинарного течения». Сегодня ясно, что линейная теория устойчивости ламинарного режима течения носит ограниченный характер.

Покажем, что основная идея или ключевой принцип, позволяющий понять механизм возникновения турбулентности в пограничном слое, заключен в полученном законе возникновения турбулентности (1).

В работах Качанова, Козлова и Левченко [6] установлена важная роль передней кромки пластины в формировании вихревых волн пограничного слоя – волн Толмина-Шлихтинга (смотри рис. 1), но до конца не ясен механизм возбуждения этих волн. Рассмотрим механизм генерации этих волн, привлекая закон (1). Качественный анализ закона показывает: возникновение градиентов скорости потока $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ на передней кромке пластины вследствие прилипания потока на стенке пластины ($u=0, v=0$), порождает возмущения давления dp в плоскости xu , которые генерируют вихревые волны. При нарушении однородности потока по размаху пластины, по мере увеличения координаты x , будут возникать возмущения давления dp по направлению z , которые будут порождать составляющую скорости w , что приведет к зарождению продольных вихрей — рис. 2. Слияние продольных вихрей приведет к скачкообразному изменению градиентов скорости, что, в свою очередь, вызовет скачкообразное изменение возмущений давления dp и, соответственно, переход к турбулентности.

Так как на конечном этапе перехода к турбулентности процесс становится трехмерным, возникают продольные вихри с составляющей скоростью w вдоль координаты z (рис. 2), задачу возникновения турбулентности в пограничном слое необходимо рассматривать в трехмерной постановке.

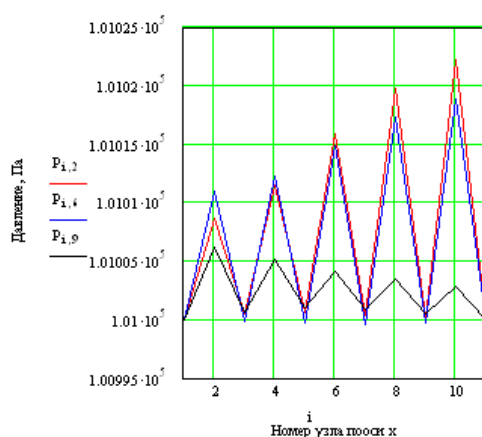
В качестве начальных условий задавалось стационарное распределение поля скоростей u и v в пограничном слое несжимаемой жидкости на плоской пластине в двумерном приближении [5].

Количество узлов конечно-разностной прямоугольной сетки по осям x , y и z принимается 11. Шаг конечно-разностной сетки принимается равномерным по осям x , y

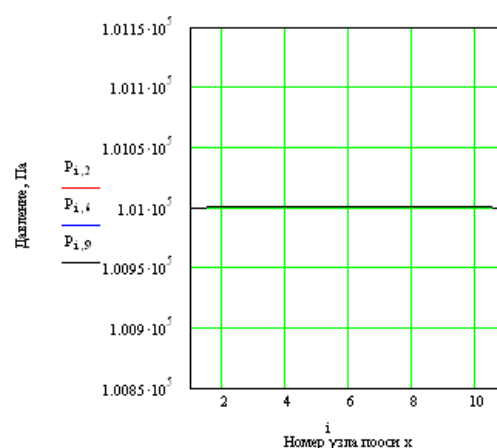
и z : $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,25 \cdot 10^{-3}$ м. Расчет выполняется для фрагмента погранслоя, начиная с расстояния от передней кромки пластины $xl=0,1$ м. Шаг по времени определялся из условия устойчивости и принимался равным $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-7}$ с. Количество шагов по времени принималось $n=100$.

Анализировалось влияние сжимаемости на характеристики погранслоя. Рассчитаны два режима: с учетом сжимаемости среды и при допущении несжимаемости.

Сравнение рисунков 3а и 3б показывает, что в сжимаемом потоке, даже при задании постоянного давления на границах расчетной области, давление в расчетной области осциллирует, в отличие от несжимаемой среды, где давление постоянно.



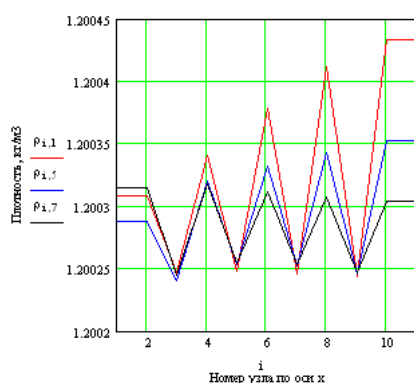
а) сжимаемая среда



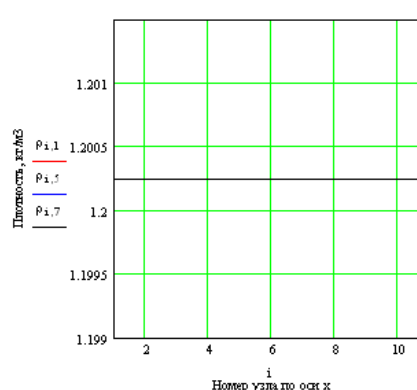
б) несжимаемая среда

Рис. 3. Изменение давления вдоль пластины в сечении $k=6$ в момент времени $n=100$

Аналогично давлению изменяется плотность в расчетной области — сравнение рисунков 4а и 4б.



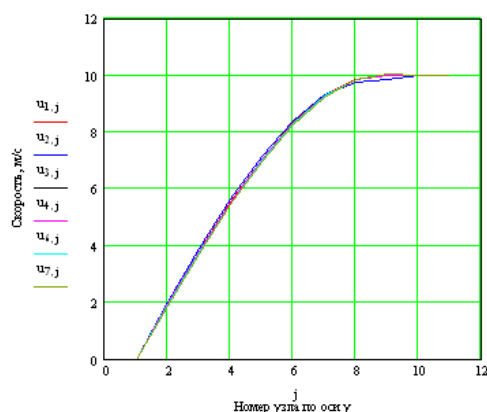
а) сжимаемая среда



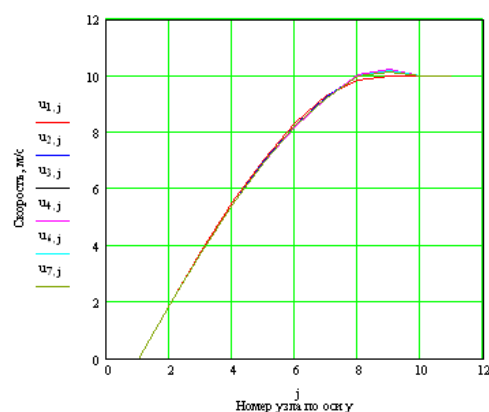
б) несжимаемая среда

Рис. 4. Изменение плотности вдоль пластины в сечении $k=6$ в момент времени $n=100$

Закон изменения скорости u в поперечном сечении погранслоя слабо зависит от сжимаемости среды — сравнение рисунков 5а и 5б.



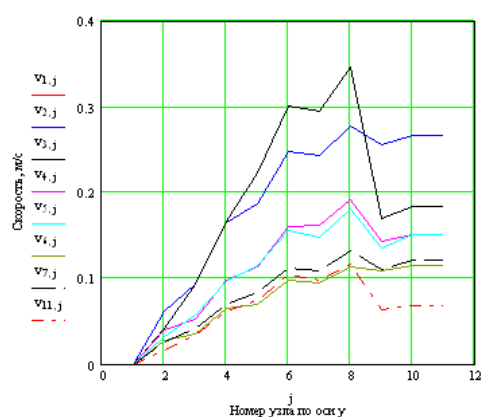
а) сжимаемая среда



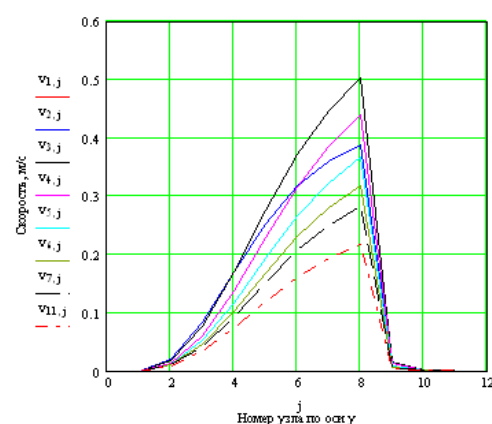
б) несжимаемая среда

Рис. 5. Изменение скорости u в поперечном сечении погранслоя в сечении $k=6$ в момент времени $n=100$

Как следует из сравнения рисунков 6а и 6б, профиль скорости v в сжимаемом погранслое начинает изменяться под влиянием пульсаций давления и плотности в большей степени на внешней границе погранслоя ($j=8$).



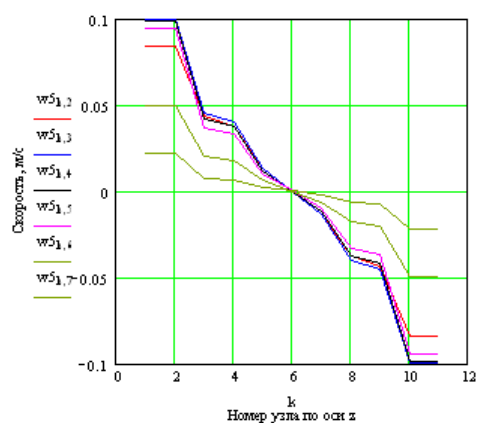
а) сжимаемая среда



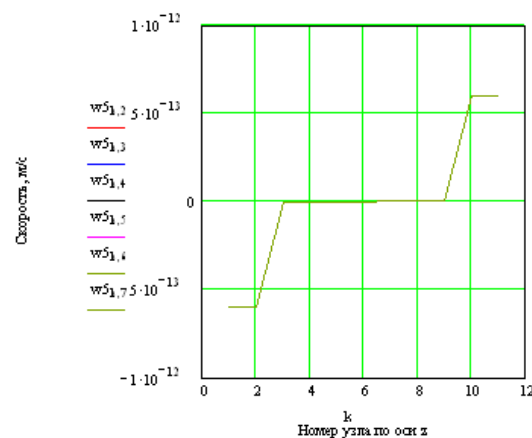
б) несжимаемая среда

Рис. 6. Изменение скорости v в поперечном сечении погранслоя в сечении $k=6$ в момент времени $n=100$

В сжимаемом погранслое возникает циркуляция потока вдоль оси z , рисунок 7а. В отличие от несжимаемой среды, рисунок 7б, где значение скорости w в 10^{12} раз меньше.



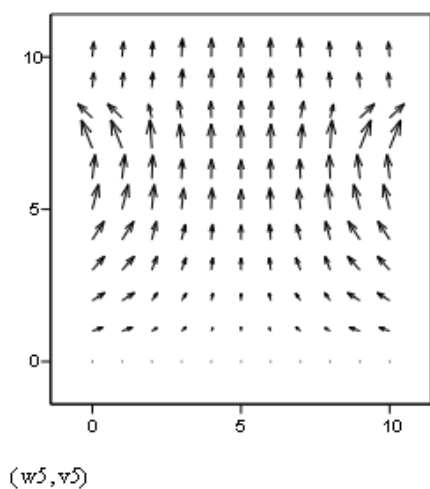
а) сжимаемая среда



б) несжимаемая среда

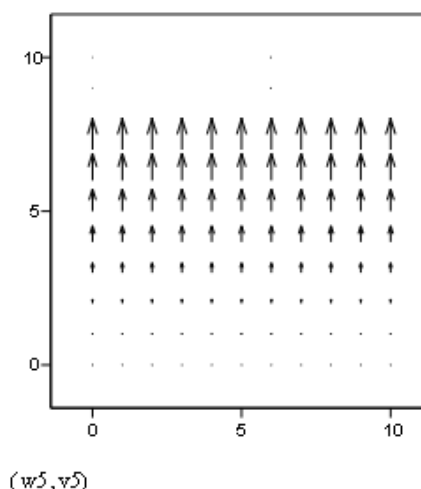
Рис. 7. Изменение скорости w вдоль оси z в сечении $i=5$ в момент времени $n=100$

Сравнение полей скоростей для сжимаемой и несжимаемой сред в плоскости yz , рис. 8а и 8б, показывает, что в сжимаемом потоке возникает завихренность вдоль оси x . Такое поведение погранслоя в большей степени соответствует реальным течениям, в которых возникают продольные вихри, рисунок 2, зафиксированные экспериментально.



(wz, vz)

а) сжимаемая среда



(wz, vz)

б) несжимаемая среда

Рис. 8. Поле скоростей в сечении погранслоя $i=5$ в момент времени $n=100$

Из анализа рисунка 9а следует, в отличие от рис. 9б, что в сжимаемом погранслое между точками $j=2$ и $j=3$ возникают осциллирующие пульсации градиента давления значительной величины $\Delta p = 2-4$ Па. В несжимаемом погранслое эти градиенты отсутствуют.

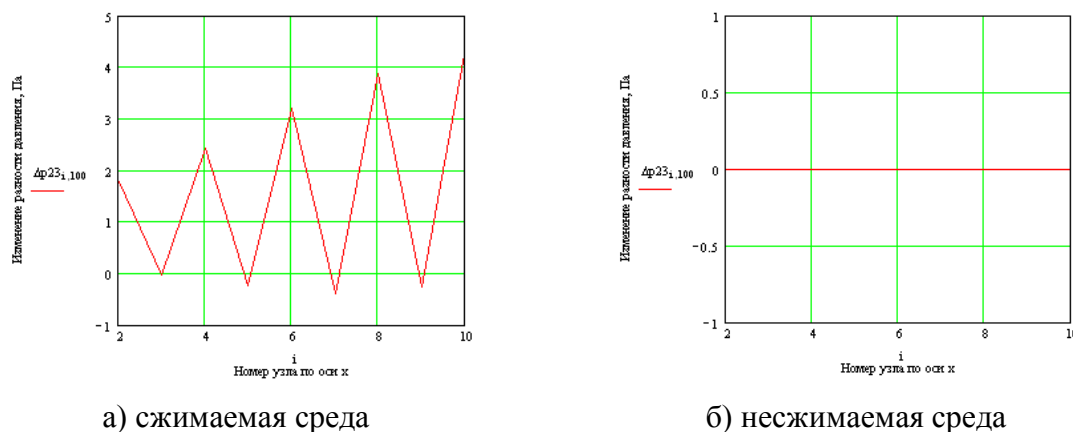


Рис. 9. Изменение разности давлений в точках $j=2$ и $j=3$ вдоль пластины в сечении $k=6$ в момент времени $n=100$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Показано, что основная идея или ключевой принцип, позволяющий понять механизм возникновения турбулентности в вязком теплопроводном газе, заключен в полученном законе возникновения турбулентности (1), из которого следует, что при возникновении градиентов скорости, например, в пограничном слое, в струйных течениях и др., будут возникать пульсации давления, порождающие турбулентность.
- Проведенный вычислительный эксперимент позволяет отметить, что при анализе возникновения турбулентности в пограничном слое необходимо учитывать сжимаемость среды и диссипацию энергии в потоке. Допущение о несжимаемости среды исключает связь между пульсациями давления и градиентами скорости, описываемые уравнением (2).
- Задачу возникновения турбулентности в пограничном слое необходимо рассматривать в трехмерной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронков С. С. О нарушении линейного закона Гука при возникновении турбулентности. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2015, 11.
2. Воронков С. С. О скорости звука в потоке вязкого газа с поперечным сдвигом. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2004, 5.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
6. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. – Новосибирск: Наука, 1982. – 151 с.
7. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. – М.: Мир, 1971. – 350 с.
8. Драйден Х.Л. Переход ламинарного течения в турбулентное. В книге: Турбулентные течения и теплопередача. – М: Изд. Иностранной литературы, 1963. – 563 с.