Электронный журнал «Техническая акустика»
http://www.ejta.org
2017, 3

А. Д. Лапин

Акустический институт им. акад. Н. Н. Андреева
117036, Москва, ул. Шверника, 4, e-mail: lapin1932@yandex.ru

Поглощение звука решеткой резонаторов с трением в стоячем звуковом поле

Получена 18.05.2017, опубликована 20.06.2017

Рассмотрена задача о рассеянии звука от решетки резонаторов Гельмгольца с трением. Эта решетка расположена на расстоянии D от стенки, характеризуемой реактивным импедансом. Решение получено методом самосогласованного поля. Показано, что решетка резонаторов с определенным трением, расположенная в пучности давления суммарного поля падающей и отраженной волн, полностью поглощает отраженную волну резонансной частоты.

Ключевые слова: Резонатор Гельмгольца, эффективный импеданс, дифракционная решетка, метод самосогласованного поля.

Известно [1-3], что некоторые малые препятствия в среде (например, газовые пузырьки в жидкости) интенсивно рассеивают падающие на них звуковые волны. Решетка из таких малых препятствий (рассеивателей) является эффективным изолятором звука. В работе [4] была рассчитана звукоизоляция плоской решетки из одинаковых неподвижных сфер, характеризуемых эффективным импедансом Z_0. Импеданс Z_0 равен отношению полной радиальной силы, действующей на сферу, к объемной скорости этой сферы. Радиус сферы равен a и он мал по сравнению с длиной волны. Было показано, что интенсивное рассеяние звука происходит только при взаимной компенсации реактивных компонент импеданса препятствий и излучения. Рассеивающая решетка с пространственными периодами, не превышающими половину длины звуковой волны, является эффективным отражателем звука резонансной частоты. Трение в резонаторах уменьшает эффективность решетки как отражателя звука. Резонаторы с трением частично поглощают звуковую энергию. При оптимальном трении (сопротивление трения равно сопротивлению излучения) решетка поглощает половину энергии падающей звуковой волны.

Представляет интерес исследовать эффективность резонаторов как поглотителей звука в стоячем звуковом поле. Ниже рассмотрена задача о рассеянии звука от решетки резонаторов с трением. Эта решетка расположена на расстоянии D от стенки, характеризуемой реактивным импедансом. Показано, что решетка резонаторов с определенным трением, расположенная в пучности давления суммарного поля падающей и отраженной волн, полностью поглощает отраженную волну резонансной частоты.

Пусть полупространство $z>0$ заполнено однородной средой и ограничено снизу стенкой, характеризуемой реактивным импедансом $Z_1 = iX_1$. Сверху на эту стенку падает плоская гармоническая волна с давлением

$$p'(x,y,z) = A\exp[i(k_x^0 x + k_y^0 y - k_z^{00})], \tag{1}$$

где k_x^0, k_y^0 и $(-k_z^{00})$ — соответственно проекции волнового вектора падающей волны на оси x, y и z, A — амплитуда волны, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем. Отраженная от стенки волна давления имеет вид

$$p''(x,y,z) = AQ^{00}\exp[i(k_x^0 x + k_y^0 y + k_z^{00})], \tag{2}$$

где коэффициент отражения Q^{00} определяется по формуле

$$Q^{00} = \{iX_1 - \rho ck/k_z^{00}\}\{iX_1 + \rho ck/k_z^{00}\}^{-1}, \tag{3}$$

ρ и c — плотность среды и скорость звука в ней, $k = \omega/c$ — волновое число. Полное поле в среде равно $p^{(0)} = p' + p''$.

Требуется поглотить отраженную волну p''. С этой целью в плоскости $z = D$ поставим решетку резонаторов с трением, резонаторы поместим в точках с координатами $x = qL, y = sl, z = D,$ где L и l — соответственно периоды решетки по осям x и y , q и s принимают значения $0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. Под действием звукового поля $p^{(0)}$ резонаторы пульсируют и создают рассеянное поле $p^{(1)}$. Обозначим через V объемную скорость резонатора, находящегося в точке с координатами $x=0, y=0, z=D$. Объемная скорость резонатора, находящегося в точке с координатами $x = qL, y = sl, z = D,$ будет $V\exp[i(k_x^0 qL + k_y^0 sl)]$. Рассеянное поле монопольного типа равно полю, создаваемому решеткой монополей. Оно удовлетворяет уравнению

$$\Delta p^{(1)} + k^2 p^{(1)} = i\omega\rho V\exp[i(k_x^0 x + k_y^0 y)]\delta(z-D)\sum_{q,s}\delta(x-qL)\delta(y-sl), \tag{4}$$

где $\delta(z)$ — дельта-функция. Решение уравнения (4), удовлетворяющее граничному условию на стенке, характеризуемой реактивным импедансом, получим методом Фурье. Оно имеет вид

$$p^{(1)}(0<z<D) = \sum_{m,n}\frac{k\rho cV}{2Llk_z^{mn}}\exp[i(k_x^m x + k_y^n y + k_z^{mn} D)]\{\exp(-ik_z^{mn} z) + Q^{mn}\exp(ik_z^{mn} z)\}, \tag{5}$$

$$p^{(1)}(z>D) = \sum_{m,n}\frac{k\rho cV^{(1)}}{2Llk_z^{mn}}\exp[i(k_x^m x + k_y^n y + k_z^{mn} z)]\{\exp(ik_z^{mn} D) + Q^{mn}\exp(ik_z^{mn} D)\}, \tag{6}$$

где

$$Q^{mn} = \{iX_1 - \rho ck/k_z^{mn}\}\{iX_1 + \rho ck/k_z^{mn}\}^{-1} \quad , \tag{7}$$

$k_x^m = k_x^0 + m(2\pi)/L$, $\quad k_y^n = k_y^0 + n(2\pi/l)$, $\quad k_z^{mn} = \sqrt{k^2 - (k_x^m)^2 - (k_y^n)^2}$, суммирование производится по всем m и n. Согласно формуле (6), рассеянное поле $p^{(1)}$ при $z > D$ состоит из однородных и неоднородных спектров Брэгга (плоских волн). Спектр mn является однородной волной при $(k_x^m)^2 + (k_y^n)^2 \le k^2$ и неоднородной волной при $(k_x^m)^2 + (k_y^n)^2 > k^2$. Для однородных спектров величину Q^{mn} можно представить в виде

$$Q^{mn} = \exp(i\varepsilon^{mn}) = \cos\varepsilon^{mn} + i\sin\varepsilon^{mn}, \tag{8}$$

где

$$\cos\varepsilon^{mn} = \{X_1^2 - [k\rho c/k_z^{mn}]^2\}\{X_1^2 + [k\rho c/k_z^{mn}]^2\}^{-1},$$
$$\sin\varepsilon^{mn} = \{2X_1[k\rho c/k_z^{mn}]\}\{X_1^2 + [k\rho c/k_z^{mn}]^2\}^{-1}.$$

Для неоднородных спектров величина Q^{mn} вещественная.

Объемную скорость V получим из граничных условий на резонаторах. Структура рассеянного поля определяется периодом рассеивающей решетки. Полное поле $(p^{(0)} + p^{(1)})$, умноженное на $\exp[-i(k_x^0 x + k_y^0 y)]$, является периодической функцией x с периодом L и периодической функцией y с периодом l. По этой причине достаточно удовлетворить граничным условиям на сфере с центром $(0,0,+D)$. Полная радиальная сила, действующая на эту сферу, равна

$$-\int_S [p^{(0)} + p^{(1)}]_{r=a} dS \, ,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-D)^2}$, интегрирование производится по этой сфере. На пульсирующей сфере, характеризуемой эффективным импедансом Z_0, выполняется соотношение

$$Z_0 V = -\int_S [p^{(0)} + p^{(1)}]_{r=a} dS.$$

Преобразуем его к виду

$$(Z_0 + Z)V = -\int_S [p^{(0)}]_{r=a} dS \quad , \tag{9}$$

где $Z = \frac{1}{V}\int_S [p^{(1)}]_{r=a} dS$ импеданс излучения монополя в решетке. При учете формул (5) – (8) получим следующие выражения для вещественной и мнимой частей импеданса излучения:

$$R \equiv \operatorname{Re} Z \approx 2{\sum_{m,n}}' \frac{k\rho c S_0}{2Llk_z^{mn}} \cos^2(k_z^{mn} D + \varepsilon^{mn}/2) \, , \tag{10}$$

$$X \equiv \operatorname{Im} Z = -\sum_{m,n}{}'' \frac{k\rho c S_0}{2Ll\left|k_z^{mn}\right|}\{1+Q^{mn}\exp[-2\left|k_z^{mn}\right|D\}\int_0^{\pi/2} J_0(k_{xy}^{mn}a\sin\theta)\exp[-\left|k_z^{mn}\right|a\cos\theta]\sin\theta d\theta\,, \quad (11)$$

где $k_{xy}^{mn} = \sqrt{(k_x^m)^2 + (k_y^n)^2}$, $S_0 = 4\pi a^2$ — площадь сферы. $J_0(k_{xy}^{mn}a\sin\theta)$ — функция Бесселя. В формуле (10) суммирование производится по всем m и n, при которых k_z^{mn} — вещественное, в формуле (11) суммирование производится по всем m и n, при которых k_z^{mn} — мнимое. В соотношении (9) правая часть равна приближенно

$$-2AS_0\exp(i\varepsilon^{00}/2)\cos(k_z^{00}D+\varepsilon^{00}/2)\,.$$

Из этого соотношения найдем объемную скорость монополя

$$V = -2AS_0\exp(i\varepsilon^{00}/2)\cos(k_z^{00}D+\varepsilon^{00}/2)\{(R_0+R)+i(X_0+X)\}^{-1}\,, \quad (12)$$

где R_0 и X_0 — соответственно вещественная и мнимая части эффективного импеданса Z_0. Подставляя V в формулы (5) и (6), получим рассеянное поле $p^{(1)}$. Согласно формулам (5), (6) и (12), интенсивное монопольное рассеяние происходит только при взаимной компенсации реактивных компонент импедансов Z_0 и Z, т.е. при выполнении соотношения $X_0 + X = 0$. В этом случае амплитуда однородного рассеянного спектра mn будет равна

$$A^{mn} = -A\frac{4\rho c k S_0}{2Llk_z^{mn}(R_0+R)}\exp[i(\varepsilon^{00}+\varepsilon^{mn})/2]\cos(k_z^{00}D+\varepsilon^{00}/2)\cos(k_z^{mn}D+\varepsilon^{mn}/2).$$

Пусть пространственные периоды решетки не превышают половину длины волны. Тогда все рассеянные спектры, кроме спектра 00, неоднородные, и сопротивление излучения монополя в решетке, находящейся перед импедансной стенкой, будет равно $2R'\cos^2(k_z^{00}D+\varepsilon^{00}/2)$, где $R' = (k\rho c S_0)/(2Llk_z^{00})$ — сопротивление излучения монополя в решетке, находящейся в безграничной среде. Амплитуду спектра 00 получим по формуле

$$A^{00} = -A\exp(i\varepsilon^{00})\frac{4\cos^2(k_z^{00}+\varepsilon^{00}/2)}{[R_0/R'+2\cos^2(k_z^{00}D+\varepsilon^{00}/2)]}\,.$$

Амплитуда давления в суммарном поле отраженной волны p'' и рассеянного спектра 00 равна

$$B^{00} \equiv AQ^{00} + A^{00} = A\exp(i\varepsilon^{00})\{1-\frac{4\cos^2(k_z^{00}D+\varepsilon^{00}/2)}{[R_0/R'+2\cos^2(k_z^{00}D+\varepsilon^{00}/2)]}\}\,. \quad (13)$$

Пусть решетка расположена в одной из пучностей давления суммарного поля падающей и отраженной волн. Тогда $(k_z^{00}D+\varepsilon^{00}/2) = N\pi$, где N — целое число, и формула (13) дает

$$B^{00} = \frac{(R_0-2R')}{(R_0+2R')}A\exp(i\varepsilon^{00})\,.$$

При $R_0 = 2R'$ амплитуда B^{00} равна нулю и отраженная звуковая волна полностью поглощается резонаторами, величина $2R'$ есть сопротивление излучения монополя в пучности давления.

Рассчитаем рассеянное поле дипольного типа. Оно обусловлено движением жидкости относительно неподвижных рассеивателей [1]. Расчет выполним раздельно для волн p' и p''. При падении плоской волны (1) каждый рассеиватель эквивалентен диполю с моментом, равным $-2\pi a^3\mathbf{v}'$, где $\mathbf{v}'$ — колебательная скорость "замороженной" жидкости в объеме этого рассеивателя. В первом приближении колебательная скорость $\mathbf{v}'$ в точке с координатами $x = qL, y = sl, z = D$ равна $\mathbf{k}'\, A'/(\omega\rho)\exp[i(k_x^0 qL + k_y^0 sl)]$, где $\mathbf{k}'$ — волновой вектор падающей волны (1), $A' = A\exp(-ik_z^{00}D)$. В безграничной однородной среде эта решетка диполей создает поле

$$p_1' = \sum_{mn} F_{mn}^{\pm}\exp[i(k_x^m x + k_y^n y \pm k_z^{mn}(z-D)],$$

где

$$F_{mn}^{\pm} = i\frac{\pi a^3 A'}{Llk_z^{mn}}[k_x^m k_x^0 + k_y^n k_y^0 \mp k_z^{mn}k_z^{00}],\ \ A' = \exp(-ik_z^{00}D),$$

верхний и нижний знаки выбираются соответственно при $z > D$ и при $z < D$. Рассеянные волны, бегущие от решетки в отрицательном направлении оси z, отражаются от импедансной стенки, и поэтому при ее наличии рассеянное дипольное поле имеет вид

$$p_2'(z > D) = \sum_{mn}[F_{mn}^{+} + Q^{mn}F_{mn}^{-}]\exp\{i[k_x^m x + k_n^y y + k_z^{mn}(z-D)]\}\ .$$

Аналогично вычислим рассеянное дипольное поле для падающей плоской волны (2). Оно равно

$$p_2''(z > D) = \sum[M_{mn}^{+} + Q^{mn}M_{mn}^{-}]\exp\{i[k_x^m x + k_y^n y + k_z^{mn}(z-D)]\},$$

где

$$M_{mn}^{\pm} = i\frac{\pi a^3 A''}{Llk_z^{mn}}[k_x^m k_x^0 + k_y^n k_y^0 \pm k_z^{mn}k_z^{00}],\ \ A'' = \exp(ik_z^{00}D).$$

Полное рассеянное дипольное поле равно $p_2' + p_2''$.

Пусть пространственные периоды решетки не превышают половину длины волны. Тогда все рассеянные спектры, кроме спектра 00, неоднородные. В дипольном поле $p_2' + p_2''$ амплитуда спектра 00 равна

$$i4\frac{\pi a^3 A}{Llk_z^{00}}\{[(k_x^0)^2 + (k_y^0)^2]\cos(\varepsilon^{00}/2)\cos(k_z^{00} + \varepsilon^{00}/2) + (k_z^{00})^2\sin(\varepsilon^{00}/2)\sin(k_z^{00}D + \varepsilon^{00}/2)\}\exp(i\varepsilon^{00} - ik_z^{00}D)].$$

Ее модуль мал по сравнению с величиной $\left|A^{00}\right|$ при резонансной частоте, A^{00} — амплитуда спектра 00 в монопольном поле $p^{(1)}$.

Различные аспекты применения резонаторов Гельмгольца обсуждаются в работах [5-9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Исакович М. А. Общая акустика М.: Наука, 1973. 496 с.
2. Morse P. M., Ingard K. U. Theoretical Acoustics. McGraw-Hill, New York, 1968.
3. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. Издательство Московского университета, 1960. 336 с.
4. Лапин А. Д., Миронов М. А. Изоляция звукового поля плоской решеткой малых рассеивателей. Сборник трудов X1 сессии РАО. М.: ГЕОС, 2001. Т. 1. С. 192-194.
5. Лапин А. Д. Отражение звука решеткой резонаторов в многомодовом цилиндрическом волноводе // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 5. С. 580-582.
6. Иванов В. П. Гашение звукового поля в круглом волноводе, оснащенном резонатором Гельмгольца. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №3. С. 18-26.
7. Santillan A., Bozhevolnyi S. I. Acoustic transparency and slow sound using detuned acoustic resonators. // Phys. Rev. B. 2011. V. 84. № 6. P. 064304.
8. Wang Z. G., Lee S.H., Park S. M., Nahm K., Nikitov S. A. Acoustic wave propagation in one-dimensional phononic crystals containing Helmholtz resonftors // Journ. Appl. Phys. 2008. V. 103. № 6. P. 064907.
9. Sugimoto N. Acoustic solitary waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V .99. № 4. P. 1971-1976.