

Д. А. Степаненко, А. С. Емельянова, М. А. Плескач,
Н. В. Солодка

*Белорусский национальный технический университет, Республика Беларусь, 220086,
г. Минск, пр. Независимости, 65; e-mail: stepd@tut.by*

Теоретическое обоснование возможности усиления ультразвуковых колебаний с помощью составных кольцевых упругих элементов

Получена 25.02.2017, опубликована 19.04.2017

Теоретически обоснована возможность усиления ультразвуковых колебаний по амплитуде с помощью составных кольцевых упругих элементов, состоящих из двух кольцевых сегментов, выполненных из материалов с различным модулем упругости. Основными преимуществами концентраторов на основе кольцевых упругих элементов по сравнению со стержневыми концентраторами являются простота изготовления, малые габаритные размеры и масса. Рассмотрена методика расчета собственных частот и форм колебаний кольцевых концентраторов, основанная на использовании метода сингулярного разложения. Приведен численный пример расчета кольцевого концентратора с коэффициентом усиления $K = 1,53$. Показано, что, как и в случае составных стержневых концентраторов, усиление обеспечивается при введении колебаний в сегмент с более высоким модулем упругости.

Ключевые слова: концентратор, усиление колебаний, кольцевой упругий элемент

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшим элементом ультразвуковых колебательных систем технологического и медицинского назначения являются концентраторы, служащие для усиления колебаний по амплитуде и обычно выполняемые в виде стержней с уменьшающейся площадью поперечного сечения. Помимо стержневых концентраторов в качестве усилителей ультразвуковых колебаний могут использоваться концентраторы на основе кольцевых упругих элементов, работоспособность которых подтверждается теоретическими и экспериментальными исследованиями [1-3]. Основными преимуществами концентраторов на основе кольцевых упругих элементов, по сравнению со стержневыми концентраторами, являются простота изготовления, малые габаритные размеры и масса. Одним из типов кольцевых концентраторов являются концентраторы на основе кольцевых упругих элементов с переменной площадью поперечного сечения, в частности, кольцевых элементов с эксцентричным расположением внутреннего контура относительно наружного [1]. Механизм усиления колебаний этими

концентраторами аналогичен механизму усиления колебаний стержневыми концентраторами и основан на изменении площади поперечного сечения. В то же время известны конструкции стержневых концентраторов, в которых усиление колебаний достигается за счет изменения упругих свойств материала при неизменной площади поперечного сечения [4, 5], в частности, конструкция, состоящая из двух соединенных между собой четвертьволновых стержней с различным модулем упругости [5]. Ступенчатое изменение модуля упругости в подобном составном концентраторе равносильно ступенчатому изменению площади поперечного сечения в ступенчатых стержневых концентраторах. Основываясь на вышесказанном, можно выдвинуть гипотезу о том, что усиление колебаний по амплитуде может быть достигнуто с помощью составных кольцевых упругих элементов, состоящих из двух кольцевых сегментов, выполненных из материалов с различным модулем упругости. Настоящая статья посвящена теоретическому обоснованию этой гипотезы.

1. МЕТОДИКА РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ КОЛЬЦЕВЫХ КОНЦЕНТРАТОРОВ

В качестве объекта исследования рассмотрим половину составного кольцевого концентратора, состоящего из двух сегментов (рис. 1).

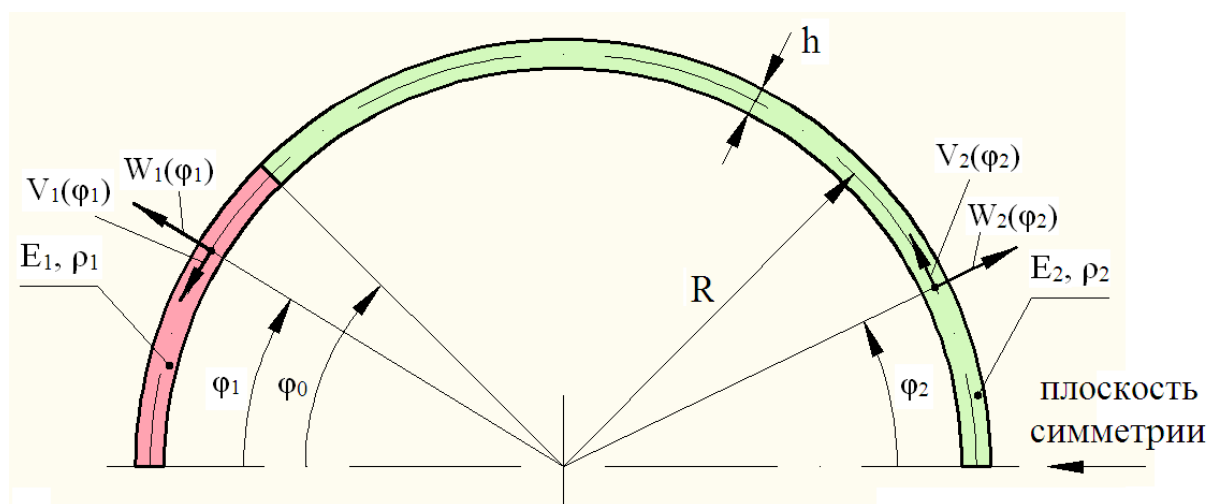


Рис. 1. Расчетная схема конструкции составного кольцевого концентратора

Нижняя половина концентратора, не показанная на рис. 1, является зеркально симметричной по отношению к верхней. Сегмент 1, для которого $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, выполнен из материала с плотностью ρ_1 и модулем упругости E_1 , а сегмент 2, для которого $\varphi_0 < \varphi \leq \pi$ — из материала с плотностью ρ_2 и модулем упругости E_2 . Колебания однородного кольцевого сегмента описываются уравнениями [6]

$$L_1 V - L_2 W = 0, \quad (1)$$

$$L_2 V - L_3 W = 0, \quad (2)$$

где V — амплитуда тангенциальных колебательных смещений, W — амплитуда радиальных колебательных смещений, L_1, L_2, L_3 — линейные дифференциальные операторы, определяемые выражениями

$$L_1 = (1 + p) \frac{d^2}{d\varphi^2} + p\zeta,$$

$$L_2 = -p \frac{d^3}{d\varphi^3} + \frac{d}{d\varphi},$$

$$L_3 = p \frac{d^4}{d\varphi^4} + 1 - p\zeta,$$

$p = J/SR^2$ — безразмерный геометрический параметр, J — осевой момент инерции поперечного сечения сегмента, S — площадь поперечного сечения сегмента, R — радиус срединной поверхности сегмента, $\zeta = \omega^2/p\omega_0^2$ — безразмерный частотный параметр, ω — круговая частота колебаний, $\omega_0 = (1/R)\sqrt{E/\rho}$.

Путем исключения из уравнений (1)-(2) одной из амплитуд могут быть получены следующие линейные дифференциальные уравнения относительно амплитуд колебательных смещений:

$$(L_1 L_3 - L_2^2)V = 0, \quad (3)$$

$$(L_1 L_3 - L_2^2)W = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } L_1 L_3 - L_2^2 = p \left(\frac{d^6}{d\varphi^6} + (2 + p\zeta) \frac{d^4}{d\varphi^4} + (1 - \zeta - p\zeta) \frac{d^2}{d\varphi^2} + \zeta(1 - p\zeta) \right) \quad (\text{на параметр } p \text{ при}$$

дальнейшем анализе можно выполнить сокращение, так как уравнения являются однородными).

Уравнения (3)-(4) имеют решения, вид которых зависит от характера корней кубического уравнения

$$\zeta^3 + (2 + p\zeta)\zeta^2 + (1 - \zeta - p\zeta)\zeta + \zeta(1 - p\zeta) = 0. \quad (5)$$

При $\zeta \leq \zeta_L$ уравнение (5) имеет три действительных отрицательных корня, при $\zeta_L < \zeta \leq \zeta_M$ — один действительный отрицательный и два комплексно сопряженных корня, при $\zeta_M < \zeta \leq \zeta_U$ — один действительный отрицательный и два действительных положительных корня, при $\zeta_U < \zeta$ — два действительных отрицательных и один действительный положительный корень. Величины $\zeta_L, \zeta_M, \zeta_U$ частотного параметра ζ , при которых происходит перемена характера корней, зависят от геометрического параметра p .

При $\zeta_M < \zeta \leq \zeta_U$ решения уравнений (3)-(4) имеют вид

$$V(\varphi) = C_1 \cos(d\varphi) + C_2 \sin(d\varphi) + C_3 \operatorname{ch}(e\varphi) + C_4 \operatorname{sh}(e\varphi) + C_5 \operatorname{ch}(f\varphi) + C_6 \operatorname{sh}(f\varphi), \quad (6)$$

$$W(\varphi) = D_1 \cos(d\varphi) + D_2 \sin(d\varphi) + D_3 \operatorname{ch}(e\varphi) + D_4 \operatorname{sh}(e\varphi) + D_5 \operatorname{ch}(f\varphi) + D_6 \operatorname{sh}(f\varphi), \quad (7)$$

где $d = \sqrt{-\zeta_1}$, $e = \sqrt{\zeta_2}$, $f = \sqrt{\zeta_3}$ — окружные волновые числа; $\zeta_1 < 0$, $\zeta_2 > 0$, $\zeta_3 > 0$ — корни уравнения (5).

Подставляя решения (6)-(7) в одно из уравнений (1)-(2) и приравнявая к нулю коэффициенты при тригонометрических и гиперболических функциях, можно найти связь между коэффициентами C_i и D_i :

$$D_1 = -\alpha_d C_2, \quad D_2 = \alpha_d C_1, \quad D_3 = \tau_e C_4, \quad D_4 = \tau_e C_3, \quad D_5 = \tau_f C_6, \quad D_6 = \tau_f C_5,$$

где коэффициенты α_d , τ_e , τ_f определяются выражениями

$$\alpha_d = \frac{p\zeta - d^2(1+p)}{d(1+pd^2)},$$

$$\tau_e = \frac{p\zeta + e^2(1+p)}{e(1-pe^2)},$$

$$\tau_f = \frac{p\zeta + f^2(1+p)}{f(1-pf^2)}.$$

При $\zeta_U < \zeta$ решения уравнений (3)-(4) имеют вид

$$V(\varphi) = C_1 \cos(d\varphi) + C_2 \sin(d\varphi) + C_3 \cos(e\varphi) + C_4 \sin(e\varphi) + C_5 \operatorname{ch}(f\varphi) + C_6 \operatorname{sh}(f\varphi), \quad (8)$$

$$W(\varphi) = -\alpha_d C_2 \cos(d\varphi) + \alpha_d C_1 \sin(d\varphi) - \alpha_e C_4 \cos(e\varphi) + \alpha_e C_3 \sin(e\varphi) + \\ + \tau_f C_6 \operatorname{ch}(f\varphi) + \tau_f C_5 \operatorname{sh}(f\varphi), \quad (9)$$

где $d = \sqrt{-\zeta_1}$, $e = \sqrt{-\zeta_2}$, $f = \sqrt{\zeta_3}$; $\zeta_1 < 0$, $\zeta_2 < 0$, $\zeta_3 > 0$ — корни уравнения (5),

$$\alpha_e = \frac{p\zeta - e^2(1+p)}{e(1+pe^2)}.$$

В случае составного кольца, состоящего из двух симметричных частей, подобных представленной на рис. 1, в силу симметрии решения (7) и (9) будут содержать только косинус и гиперболический косинус, а решения (6) и (8) только синус и гиперболический синус. Это равносильно выполнению граничных условий

$$V_1(0) = V_2(0) = 0, \quad (10)$$

$$\left. \frac{dW_1}{d\varphi_1} \right|_{\varphi_1=0} + V_1(0) = \left. \frac{dW_2}{d\varphi_2} \right|_{\varphi_2=0} + V_2(0) = 0, \quad (11)$$

$$\left. \frac{d^3 W_1}{d\varphi_1^3} \right|_{\varphi_1=0} + \left. \frac{d^2 V_1}{d\varphi_1^2} \right|_{\varphi_1=0} = \left. \frac{d^3 W_2}{d\varphi_2^3} \right|_{\varphi_2=0} + \left. \frac{d^2 V_2}{d\varphi_2^2} \right|_{\varphi_2=0} = 0. \quad (12)$$

Условие (11) выражает равенство нулю амплитуды угла поворота поперечного сечения $\psi(\varphi) = (1/R)(dW/d\varphi + V)$ на концах сегментов, а условие (12) — равенство нулю амплитуды поперечных сил $Q(\varphi) = -(EJ/R^3)(d^3W/d\varphi^3 + d^2V/d\varphi^2)$ на концах сегментов.

Индексы «1» и «2» у амплитуд колебательных смещений и угловых координат указывают на их отношение к соответствующим сегментам. При этом координата φ_1 совпадает с координатой φ , то есть отсчитывается от того же начала отсчета в том же направлении, а координата φ_2 отсчитывается от сечения $\varphi = \pi$ в противоположном направлении. Координаты φ_1 и φ_2 связаны соотношением $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$. Выражение амплитуд колебательных смещений для второго сегмента в системе координат φ_2 позволяет сократить число неизвестных постоянных C_i , от которых они зависят, до трех. Решение (6) для первого сегмента можно записать в виде

$$V_1(\varphi_1) = A_1 \sin(d_1 \varphi_1) + A_2 \operatorname{sh}(e_1 \varphi_1) + A_3 \operatorname{sh}(f_1 \varphi_1),$$

а для второго сегмента

$$V_2(\varphi_2) = A_4 \sin(d_2 \varphi_2) + A_5 \operatorname{sh}(e_2 \varphi_2) + A_6 \operatorname{sh}(f_2 \varphi_2).$$

Неизвестные постоянные обозначены как A_i для того, чтобы избежать введения у постоянных C_i дополнительного индекса, указывающего на номер сегмента.

Аналогичным образом записываются решения (7)-(9).

Так как сегменты полукольца выполнены из различных материалов, то при равной частоте колебаний частотный параметр ξ будет принимать для двух сегментов два различных значения ξ_1 и ξ_2 . Этим значениям будут соответствовать различные корни уравнения (5) и, следовательно, различные значения окружных волновых чисел d, e, f .

Для определения неизвестных постоянных A_i необходимо рассмотреть кинематические и силовые условия непрерывности решений в сечении $\varphi = \varphi_0$:

$$V_1(\varphi_0) = V_2(\pi - \varphi_0), \quad (13)$$

$$W_1(\varphi_0) = W_2(\pi - \varphi_0), \quad (14)$$

$$\frac{1}{R} \left(\left. \frac{dW_1}{d\varphi_1} \right|_{\varphi_1=\varphi_0} + V_1(\varphi_0) \right) = \frac{1}{R} \left(\left. \frac{dW_2(\pi - \varphi_1)}{d\varphi_1} \right|_{\varphi_1=\varphi_0} + V_2(\pi - \varphi_0) \right), \quad (15)$$

$$\frac{E_1 S}{R} \left(\left. \frac{dV_1}{d\varphi_1} \right|_{\varphi_1=\varphi_0} - W_1(\varphi_0) \right) = \frac{E_2 S}{R} \left(\left. \frac{dV_2(\pi - \varphi_1)}{d\varphi_1} \right|_{\varphi_1=\varphi_0} - W_2(\pi - \varphi_0) \right), \quad (16)$$

$$\frac{E_1 J}{R^2} \left(\left. \frac{dV_1}{d\varphi_1} \right|_{\varphi_1=\varphi_0} + \left. \frac{d^2 W_1}{d\varphi_1^2} \right|_{\varphi_1=\varphi_0} \right) = \frac{E_2 J}{R^2} \left(\left. \frac{dV_2(\pi - \varphi_1)}{d\varphi_1} \right|_{\varphi_1=\varphi_0} + \left. \frac{d^2 W_2(\pi - \varphi_1)}{d\varphi_1^2} \right|_{\varphi_1=\varphi_0} \right), \quad (17)$$

$$-\frac{E_1 J}{R^3} \left(\frac{d^2 V_1}{d\varphi_1^2} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0} + \frac{d^3 W_1}{d\varphi_1^3} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0} \right) = -\frac{E_2 J}{R^3} \left(\frac{d^2 V_2(\pi-\varphi_1)}{d\varphi_1^2} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0} + \frac{d^3 W_2(\pi-\varphi_1)}{d\varphi_1^3} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0} \right). \quad (18)$$

Условие (13) описывает непрерывность тангенциальных смещений, (14) — непрерывность радиальных смещений, (15) — непрерывность угла поворота поперечного сечения, (16) — непрерывность продольной силы, (17) — непрерывность момента, (18) — непрерывность поперечной силы.

С учетом условия (13) условие (15) можно записать в виде

$$\frac{dW_1}{d\varphi_1} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0} = \frac{dW_2(\pi-\varphi_1)}{d\varphi_1} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0}. \quad (19)$$

Если ввести обозначение $k_E = E_1/E_2$, то условия (16)-(18) примут вид

$$k_E \left(\frac{dV_1}{d\varphi_1} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0} - W_1(\varphi_0) \right) = \frac{dV_2(\pi-\varphi_1)}{d\varphi_1} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0} - W_2(\pi-\varphi_0), \quad (20)$$

$$k_E \left(\frac{dV_1}{d\varphi_1} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0} + \frac{d^2 W_1}{d\varphi_1^2} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0} \right) = \frac{dV_2(\pi-\varphi_1)}{d\varphi_1} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0} + \frac{d^2 W_2(\pi-\varphi_1)}{d\varphi_1^2} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0}, \quad (21)$$

$$k_E \left(\frac{d^2 V_1}{d\varphi_1^2} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0} + \frac{d^3 W_1}{d\varphi_1^3} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0} \right) = \frac{d^2 V_2(\pi-\varphi_1)}{d\varphi_1^2} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0} + \frac{d^3 W_2(\pi-\varphi_1)}{d\varphi_1^3} \Big|_{\varphi_1=\varphi_0}. \quad (22)$$

Из граничных условий (13), (14), (19)-(22) получается следующая система однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных A_i :

$$\mathbf{M}(\omega)\mathbf{A} = 0, \quad (23)$$

где \mathbf{M} — матрица размером 6×6 , вид которой зависит от соотношения частотных параметров ξ_1 и ξ_2 и величин ξ_L , ξ_M , ξ_U ; $\mathbf{A} = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5 \ A_6)^T$ — вектор неизвестных постоянных.

В случае $\xi_M < \xi_1 \leq \xi_U$, $\xi_M < \xi_2 \leq \xi_U$ элементы матрицы \mathbf{M} определяются выражениями

$$M_{11} = \sin(d_1\varphi_0), \quad M_{12} = \text{sh}(e_1\varphi_0), \quad M_{13} = \text{sh}(f_1\varphi_0),$$

$$M_{14} = -\sin(d_2(\pi-\varphi_0)), \quad M_{15} = -\text{sh}(e_2(\pi-\varphi_0)), \quad M_{16} = -\text{sh}(f_2(\pi-\varphi_0)),$$

$$M_{21} = -\alpha_{d1} \cos(d_1\varphi_0), \quad M_{22} = \tau_{e1} \text{ch}(e_1\varphi_0), \quad M_{23} = \tau_{f1} \text{ch}(f_1\varphi_0),$$

$$M_{24} = \alpha_{d2} \cos(d_2(\pi-\varphi_0)), \quad M_{25} = -\tau_{e2} \text{ch}(e_2(\pi-\varphi_0)), \quad M_{26} = -\tau_{f2} \text{ch}(f_2(\pi-\varphi_0)),$$

$$M_{31} = \alpha_{d1} d_1 \sin(d_1 \varphi_0), \quad M_{32} = \tau_{e1} e_1 \operatorname{sh}(e_1 \varphi_0), \quad M_{33} = \tau_{f1} f_1 \operatorname{sh}(f_1 \varphi_0),$$

$$M_{34} = \alpha_{d2} d_2 \sin(d_2(\pi - \varphi_0)), \quad M_{35} = \tau_{e2} e_2 \operatorname{sh}(e_2(\pi - \varphi_0)), \quad M_{36} = \tau_{f2} f_2 \operatorname{sh}(f_2(\pi - \varphi_0)),$$

$$M_{41} = k_E(d_1 + \alpha_{d1}) \cos(d_1 \varphi_0), \quad M_{42} = k_E(e_1 - \tau_{e1}) \operatorname{ch}(e_1 \varphi_0), \quad M_{43} = k_E(f_1 - \tau_{f1}) \operatorname{ch}(f_1 \varphi_0),$$

$$M_{44} = (d_2 - \alpha_{d2}) \cos(d_2(\pi - \varphi_0)), \quad M_{45} = (e_2 + \tau_{e2}) \operatorname{ch}(e_2(\pi - \varphi_0)),$$

$$M_{46} = (f_2 + \tau_{f2}) \operatorname{ch}(f_2(\pi - \varphi_0)),$$

$$M_{51} = k_E d_1 (1 + \alpha_{d1} d_1) \cos(d_1 \varphi_0), \quad M_{52} = k_E e_1 (1 + \tau_{e1} e_1) \operatorname{ch}(e_1 \varphi_0), \quad M_{53} = k_E f_1 (1 + \tau_{f1} f_1) \operatorname{ch}(f_1 \varphi_0),$$

$$M_{54} = d_2 (1 - \alpha_{d2} d_2) \cos(d_2(\pi - \varphi_0)), \quad M_{55} = e_2 (1 - \tau_{e2} e_2) \operatorname{ch}(e_2(\pi - \varphi_0)),$$

$$M_{56} = f_2 (1 - \tau_{f2} f_2) \operatorname{ch}(f_2(\pi - \varphi_0)),$$

$$M_{61} = -k_E d_1^2 (1 + \alpha_{d1} d_1) \sin(d_1 \varphi_0), \quad M_{62} = k_E e_1^2 (1 + \tau_{e1} e_1) \operatorname{sh}(e_1 \varphi_0),$$

$$M_{63} = k_E f_1^2 (1 + \tau_{f1} f_1) \operatorname{sh}(f_1 \varphi_0),$$

$$M_{64} = d_2^2 (1 - \alpha_{d2} d_2) \sin(d_2(\pi - \varphi_0)), \quad M_{65} = -e_2^2 (1 - \tau_{e2} e_2) \operatorname{sh}(e_2(\pi - \varphi_0)),$$

$$M_{66} = -f_2^2 (1 - \tau_{f2} f_2) \operatorname{sh}(f_2(\pi - \varphi_0)).$$

Пусть функции $V(\varphi)$ и $W(\varphi)$ удовлетворяют уравнениям (1)-(4). Рассмотрим функции $V^*(\varphi) = V(\pi - \varphi)$, $W^*(\varphi) = W(\pi - \varphi)$. Левая часть уравнения (1), записанная относительно функций V^* и W^* , примет вид

$$\begin{aligned} (1+p) \frac{d^2 V^*(\pi - \varphi)}{d\varphi^2} + p \zeta V^*(\pi - \varphi) + p \frac{d^3 W^*(\pi - \varphi)}{d\varphi^3} - \frac{dW^*(\pi - \varphi)}{d\varphi} = \\ = (1+p) \frac{d^2 V^*(\pi - \varphi)}{d(\pi - \varphi)^2} + p \zeta V^*(\pi - \varphi) - p \frac{d^3 W^*(\pi - \varphi)}{d(\pi - \varphi)^3} + \frac{dW^*(\pi - \varphi)}{d(\pi - \varphi)}. \end{aligned}$$

Если принять $\varphi = \varphi_1$, то с учетом равенства $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ получим

$$L_{1\varphi_1} V(\varphi_1) - L_{2\varphi_1} W(\varphi_1) = L_{1\varphi_2} V^*(\varphi_2) + L_{2\varphi_2} W^*(\varphi_2),$$

то есть при выражении амплитуд колебательных смещений в системе координат φ_2 происходит изменение знака дифференциального оператора L_2 в уравнениях (1)-(2).

Уравнения (3)-(4) остаются при этом инвариантными, так как они содержат только чётные производные амплитуд колебательных смещений. Индексы φ_1 и φ_2 у дифференциальных операторов указывают на то, что они выполняют дифференцирование по соответствующим координатам.

Изменение знака дифференциального оператора L_2 в уравнениях (1)-(2) при рассмотрении решений в системе координат φ_2 приводит к изменению знака коэффициентов пропорциональности α_{d2} , α_{e2} , τ_{e2} , τ_{f2} на противоположный по сравнению с приведенными выше формулами. Это равносильно изменению знаков при коэффициентах α_{d2} , τ_{e2} , τ_{f2} на противоположные в приведенных выше выражениях для элементов матрицы M_{24} - M_{26} , M_{34} - M_{36} , M_{44} - M_{46} , M_{54} - M_{56} , M_{64} - M_{66} .

Если свойства материалов таковы, что частота ω_0 для первого сегмента выше частоты ω_0 для второго сегмента, то возможен также случай $\xi_M < \xi_1 \leq \xi_U$, $\xi_U < \xi_2$. В этом случае меняется вид элементов матрицы M_{15} :

$$M_{15} = -\sin(e_2(\pi - \varphi_0)), M_{25} = -\alpha_{e2} \cos(e_2(\pi - \varphi_0)), M_{35} = -\alpha_{e2} e_2 \sin(e_2(\pi - \varphi_0)),$$

$$M_{45} = (e_2 + \alpha_{e2}) \cos(e_2(\pi - \varphi_0)), M_{55} = e_2(1 + \alpha_{e2} e_2) \cos(e_2(\pi - \varphi_0)),$$

$$M_{65} = e_2^2(1 + \alpha_{e2} e_2) \sin(e_2(\pi - \varphi_0)).$$

Знак коэффициента α_{e2} в приведенных выражениях изменен на противоположный с учетом описанного выше изменения знака дифференциального оператора L_2 .

В случае высоких частот ω также возможна ситуация $\xi_U < \xi_1$, $\xi_U < \xi_2$. В этом случае меняется вид элементов матрицы M_{12} :

$$M_{12} = \sin(e_1 \varphi_0), M_{22} = -\alpha_{e1} \cos(e_1 \varphi_0), M_{32} = \alpha_{e1} e_1 \sin(e_1 \varphi_0),$$

$$M_{42} = k_E(e_1 + \alpha_{e1}) \cos(e_1 \varphi_0), M_{52} = k_E e_1(1 + \alpha_{e1} e_1) \cos(e_1 \varphi_0),$$

$$M_{62} = -k_E e_1^2(1 + \alpha_{e1} e_1) \sin(e_1 \varphi_0),$$

где знак коэффициента α_{e1} не меняется.

Для того чтобы система (23) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы выполнялось условие резонанса

$$\det \mathbf{M}(\omega) = 0,$$

из которого определяются резонансные частоты колебаний кольца.

Отыскание вектора \mathbf{A} и зависящих от его значения собственных форм колебаний затрудняется тем, что матрица $\mathbf{M}(\omega)$ в окрестности точек резонанса является плохо обусловленной. Решение систем с плохо обусловленной матрицей может производиться методом сингулярного разложения (SVD-разложения), в котором матрица \mathbf{M} представляется в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*,$$

где \mathbf{U} и \mathbf{V} — унитарные матрицы, состоящие из левых и правых сингулярных векторов матрицы \mathbf{M} , $\mathbf{\Sigma}$ — диагональная матрица, диагональные элементы которой являются сингулярными числами матрицы \mathbf{M} , \mathbf{V}^* — эрмитово-сопряженная матрица по отношению к \mathbf{V} .

Если n — порядок матрицы \mathbf{M} , а $r = \text{rank}(\mathbf{M})$ — ее ранг, то матрица \mathbf{M} будет иметь $n - r$ нулевых или близких к нулю сингулярных чисел. Правые сингулярные векторы, соответствующие нулевым или близким к нулю сингулярным числам, в силу определения сингулярных векторов и чисел будут являться линейно независимыми нетривиальными решениями системы (23). В рассматриваемом случае $n = 6$, $r = 5$.

2. ПРИМЕР РАСЧЕТА КОЛЬЦЕВОГО КОНЦЕНТРАТОРА

В качестве примера рассмотрим расчет составного кольцевого концентратора со следующими параметрами: радиус срединной поверхности $R = 29$ мм, толщина в радиальном направлении $h = 2$ мм, толщина в осевом направлении $b = 2$ мм, модули упругости материалов $E_1 = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па (сталь) и $E_2 = 1,3 \cdot 10^{11}$ Па (бронза), плотности материалов $\rho_1 = 7800$ кг/м³ и $\rho_2 = 8300$ кг/м³, центральный угол первого сегмента $\varphi_0 = \pi/4$. Геометрический параметр p принимает значение $p = 4,0 \cdot 10^{-4}$, а значения частотного параметра ξ , при которых меняется характер корней уравнения (5), составляют $\xi_L = 0,113$, $\xi_M = 17,5$, $\xi_U = 2523$. Были рассмотрены частоты колебаний f в диапазоне от 20 до 25 кГц, что соответствует изменению частотного параметра ξ_1 в диапазоне от 1245 до 1945 и частотного параметра ξ_2 в диапазоне от 2139 до 3343. Таким образом, в рассматриваемом диапазоне частот всегда выполняется условие $\xi_M < \xi_1 < \xi_U$, а параметр ξ_2 удовлетворяет условию $\xi_M < \xi_2 \leq \xi_U$ при частотах $20 \text{ кГц} \leq f \leq 21,72 \text{ кГц}$ и условию $\xi_U < \xi_2$ при частотах $21,72 \text{ кГц} < f \leq 25 \text{ кГц}$. На рис. 2 приведена резонансная кривая концентратора, то есть график зависимости $\lg(|\det \mathbf{M}(f)|)$ от частоты f .

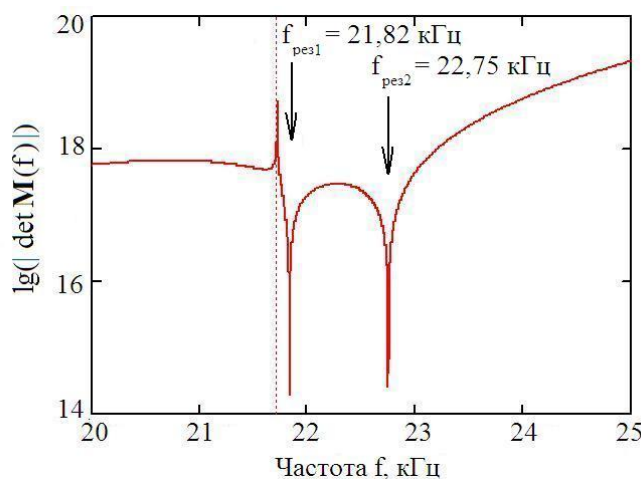


Рис. 2. Расчетная резонансная кривая концентратора

Точки, в которых $\lg(|\det \mathbf{M}(f)|) \rightarrow -\infty$, соответствуют резонансным частотам. Вертикальной штриховой линией обозначена частота f_{U2} , при которой частотный параметр ξ_2 принимает значение $\xi_2 = \xi_U$. Одной из резонансных частот является частота

$f_{\text{рез}} = 22,75$ кГц, для которой с помощью метода сингулярного разложения была рассчитана собственная форма колебаний. Распределение амплитуды радиальных колебательных смещений $W(\varphi)$ для этой собственной формы колебаний приведено на рис. 3.

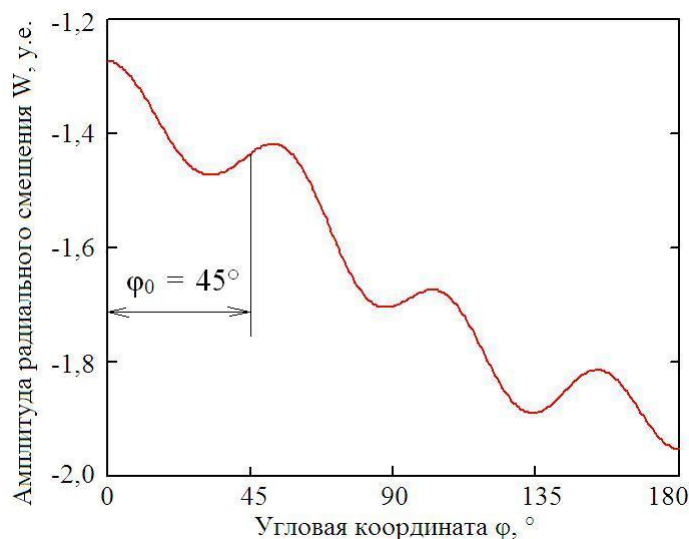


Рис. 3. Расчетное распределение амплитуды радиальных колебательных смещений

Из множества линейно зависящих нетривиальных решений уравнения (23) было выбрано решение, удовлетворяющее условию $\|\mathbf{A}\|=1$. Как видно из рис. 3, рассматриваемая собственная форма колебаний характеризуется наличием усиления колебаний по амплитуде с коэффициентом усиления

$$K = |W(\pi)/W(0)| = 1,53.$$

Как и в случае составных стержневых концентраторов, усиление обеспечивается при введении колебаний в сегмент с более высоким модулем упругости.

3. АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНЦЕНТРАТОРЕ

Как известно из механики [7, с. 396], распределение амплитуды σ нормальных напряжений в поперечном сечении кольца описывается уравнением

$$\sigma(x, \varphi) = \frac{E}{R} \left(-W + \frac{dV}{d\varphi} - \frac{x}{R} \left(\frac{d^2W}{d\varphi^2} + \frac{dV}{d\varphi} \right) \right) = \frac{N(\varphi)}{S} - \frac{M(\varphi)x}{J}, \quad (24)$$

где x — координата, отсчитываемая от срединной поверхности кольца в направлении толщины h , $N(\varphi)$ — амплитуда продольной силы, $M(\varphi)$ — амплитуда момента.

Обозначим как $\sigma_1(\varphi)$ и $\sigma_2(\varphi)$ амплитуды напряжений, возникающих на внутренней ($x = -h/2$) и внешней ($x = h/2$) поверхностях кольца. В зависимости от знака амплитуды момента $M(\varphi)$ максимальные по модулю напряжения могут возникать на внешней или

внутренней поверхностях кольца, что иллюстрируется рис. 4, на котором приведено распределение амплитуд напряжений σ_1 и σ_2 для амплитуды радиальных колебательных смещений $W(0) = 1$ мкм.

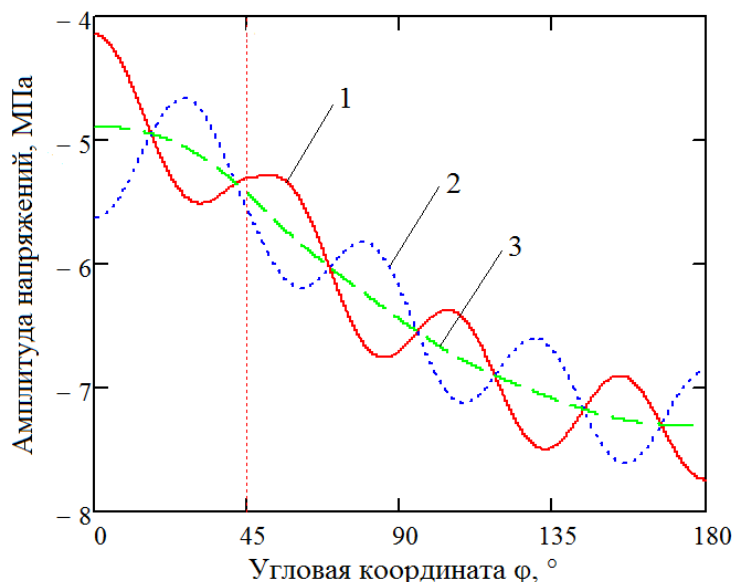


Рис. 4. Расчетное распределение амплитуд напряжений:

1 — $\sigma_1(\varphi)$, 2 — $\sigma_2(\varphi)$, 3 — $\sigma_{\text{ср}}(\varphi)$

В частности, при $\varphi = 0$ максимальные по модулю напряжения возникают на внешней поверхности кольца, а при $\varphi = \pi$ — на внутренней поверхности. Анализ показывает, что в уравнении (24) слагаемое $\sigma_{\text{ср}}(\varphi) = N(\varphi)/S$, соответствующее среднему значению амплитуды нормальных напряжений в поперечном сечении кольца, является знакопостоянным с отрицательным знаком, а величина $-M(\varphi)x/2J$ при фиксированном значении x является знакопеременной. Если знак величины $-M(\varphi)h/2J$ совпадает со знаком амплитуды напряжения $\sigma_{\text{ср}}(\varphi)$, что имеет место при $M(\varphi) > 0$, то максимальные по модулю напряжения возникают на внешней поверхности кольца, а при противоположности знаков указанных величин ($M(\varphi) < 0$) — на внутренней поверхности.

Допустимая амплитуда радиальных колебательных смещений $W_{\text{доп}}$ во входном сечении концентратора $\varphi = 0$ определяется из условия:

$$W_{\text{доп}} = \frac{W(0)}{K_3} \min \left(\frac{(\sigma_{-1})_1}{\sigma_{\text{max } 1}}, \frac{(\sigma_{-1})_2}{\sigma_{\text{max } 2}} \right),$$

где $\sigma_{\text{max } 1}$ и $\sigma_{\text{max } 2}$ — максимальные по модулю значения амплитуды нормальных напряжений для первого и второго сегментов концентратора при амплитуде радиальных колебательных смещений во входном сечении, равной $W(0)$, $(\sigma_{-1})_1$ и $(\sigma_{-1})_2$ — пределы выносливости на изгиб для материалов первого и второго сегментов, K_3 — коэффициент запаса прочности.

Для рассмотренного в разделе 2 примера были приняты следующие значения параметров: $(\sigma_{-1})_1 = 270$ МПа (нормализованная сталь 45), $(\sigma_{-1})_2 = 270$ МПа (бериллиевая бронза, справочное значение 250-290 МПа), $K_3 = 1,5$, $\sigma_{\max 1} = 7,7$ МПа (см. рис. 4), $\sigma_{\max 2} = 5,6$ МПа. В результате было получено допустимое значение амплитуды $W_{\text{доп}} = 23,3$ мкм, что с учетом коэффициента усиления $K = 1,53$ позволяет получить в выходном сечении концентратора амплитуду 35,7 мкм, достаточную для выполнения многих технологических операций.

4. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СПОСОБА СОЕДИНЕНИЯ СЕГМЕНТОВ

Соединение сегментов концентратора предпочтительно выполнять способом, обеспечивающим формирование между ними переходного слоя с непрерывным (градиентным) изменением физико-механических свойств. Для обеспечения этого требования представляется рациональным использование диффузионной сварки, обеспечивающей высокую прочность соединения, сопоставимую с объемной прочностью свариваемых материалов, и применимую для соединения широкого спектра материалов, которые могут существенно различаться по своим физико-механическим свойствам. В случае ступенчатого изменения физико-механических свойств на границе раздела сегментов возможны нежелательные эффекты, связанные с отражением волн на границе раздела акустически несогласованных сред. При градиентном изменении физико-механических свойств достигается идеальное акустическое согласование сегментов. При этом как показывает анализ, наличие тонкого переходного слоя мало влияет на эксплуатационные показатели волноводов [4]. В случае, когда технология соединения сегментов не обеспечивает формирования градиентного переходного слоя, необходимо стремиться к выбору материалов с близкими значениями волнового сопротивления. В частности, для рассмотренного в разделе 2 примера волновые сопротивления материалов сегментов составляют $z_1 = 4,1 \cdot 10^7$ кг/(м²·с) и $z_2 = 3,3 \cdot 10^7$ кг/(м²·с). Для грубой оценки отражательных свойств границы раздела можно воспользоваться формулой, выражающей коэффициент отражения плоских волн по интенсивности $R_I = (z_2 - z_1)^2 / (z_2 + z_1)^2$. Применение этой формулы дает значение $R_I = 1,2$ %, то есть при указанных свойствах материалов на границе раздела сегментов отражается лишь малая часть энергии волны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в статье конструкция кольцевых концентраторов может быть использована в ультразвуковой технике и технологии вместо традиционных стержневых концентраторов, а также в сочетании с ними. Коэффициент усиления составного кольцевого концентратора, как и в случае составных стержневых концентраторов, ограничивается соотношением механических характеристик материалов сегментов, а именно их модулей упругости и плотностей, и в приведенном примере расчета принимает сравнительно небольшое значение $K = 1,53$. Однако в сочетании с традиционным стержневым концентратором со сравнительно высоким

коэффициентом усиления кольцевой концентратор будет способен обеспечить высокую амплитуду колебательных смещений рабочего инструмента без существенного увеличения габаритов и массы колебательной системы. Также важен тот факт, что применение кольцевого концентратора позволяет обеспечить усиление колебаний по амплитуде без уменьшения диаметра колебательной системы, который имеет место в случае стержневых концентраторов. Это позволяет получить высокую амплитуду колебаний рабочего инструмента без существенного снижения прочности колебательной системы в выходном сечении, вызванного уменьшением ее диаметра.

В качестве направлений дальнейшей работы представляют интерес проведение экспериментальных исследований кольцевых концентраторов, оптимизация их геометрических и механических параметров и разработка простых методов их инженерного расчета и проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степаненко, Д.А. Влияние формы кольцевого концентратора ультразвуковой системы на коэффициент усиления амплитуды колебаний / Д.А. Степаненко, И.В. Луговой, В.П. Луговой // Наука и техника. — 2016. — № 3. — С. 209-215.
2. Степаненко, Д.А. Разработка и исследование нового типа концентраторов ультразвуковых колебаний на основе кольцевых упругих элементов / Д.А. Степаненко, В.Т. Минченя, В.П. Луговой, И.В. Луговой // Материалы. Технологии. Инструменты. — 2013. — Т. 18, № 2. — С. 90-94.
3. Луговой, И.В. Упругие характеристики кольцевых концентраторов ультразвуковых систем / И.В. Луговой, В.П. Луговой // Наука и техника. — 2014. — № 3. — С. 24-27.
4. Степаненко, Д.А. Методика расчета и возможные применения функционально-градиентных ультразвуковых волноводов / Д.А. Степаненко, В.Т. Минченя // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 5 (22). — С. 19-23.
5. United States Patent Application 2007/0131034 A1, Int. Cl. G01N 29/00. Amplifying ultrasonic waveguides / T.D. Ehlert [et al.]. — Appl. No. 13/228985; filed 09.09.2011; pub. date 29.12.2011.
6. Lang, T.E. Vibration of thin circular rings. Part I. Solution for modal characteristics and forced excitation. Jet Propulsion Laboratory Technical Report No. 32-261 / T.E. Lang. — Pasadena, 1962. — 21 p.
7. Rao, S.S. Vibration of continuous systems / S.S. Rao. — Hoboken: John Wiley & Sons, 2007. — 720 p.