Электронный журнал «Техническая акустика»
http://www.ejta.org

2018, 2

Д. А. Степаненко, А. С. Емельянова, М. А. Плескач,
Н. В. Солодкая

Белорусский национальный технический университет, Республика Беларусь, 220086, г. Минск, пр. Независимости, 65; e-mail: stepd@tut.by

Исследование характеристик составных кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний с помощью метода передаточных матриц

Получена 03.08.2018, опубликована 12.09.2018

Рассмотрено применение метода передаточных матриц для решения задач расчета и проектирования составных кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний. На основе численного примера показано, что существует два типа собственных форм колебаний концентратора: 1) собственные формы со знакопеременной амплитудой радиальных колебательных смещений; 2) собственные формы со знакопостоянной амплитудой радиальных колебательных смещений. При этом усиление колебаний по амплитуде обеспечивается только собственными формами второго типа. По сравнению с методикой, основанной на решении дифференциальных уравнений колебаний, метод передаточных матриц является более эффективным с инженерной точки зрения, так как не требует от расчетчика знаний в области теории дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: кольцевой концентратор, ультразвуковые колебания, передаточная матрица

ВВЕДЕНИЕ

В ультразвуковой технике и технологии для усиления ультразвуковых колебаний по амплитуде могут использоваться стержневые концентраторы в виде стержней с переменной по длине площадью поперечного сечения либо в виде двух соединенных между собой четвертьволновых сегментов с одинаковой площадью поперечного сечения и различным волновым сопротивлением, а также кольцевые концентраторы в виде кольцевых упругих элементов с переменной по длине площадью поперечного сечения, либо состоящих из двух кольцевых сегментов, выполненных из материалов с различным волновым сопротивлением (составные кольцевые концентраторы). Работоспособность кольцевых концентраторов подтверждается теоретическими и экспериментальными исследованиями [1-4]. Основными преимуществами кольцевых концентраторов по сравнению со стержневыми являются технологичность в изготовлении, малые габаритные размеры и масса. Механизм усиления колебаний составными кольцевыми концентраторами аналогичен механизму усиления колебаний стрежневыми концентраторами, состоящими из двух сегментов с различными акустическими свойствами материала. Авторами была ранее описана методика расчета собственных частот и форм колебаний составных кольцевых концентраторов, основанная на решении дифференциальных уравнений изгибных колебаний кольцевых сегментов, из которых состоит концентратор [4]. Вместе с тем, опыт расчета и проектирования составных стержневых концентраторов показывает, что более эффективным с инженерной точки зрения является использование метода передаточных матриц, который не требует от расчетчика знаний в области теории дифференциальных уравнений [5]. В настоящей статье рассматриваются особенности применения метода передаточных матриц для решения задач расчета и проектирования составных кольцевых концентраторов.

1. МЕТОДИКА РАСЧЕТА

При использовании метода передаточных матриц колебания концентратора в произвольно взятом поперечном сечении с координатой x описываются вектором параметров колебаний $\mathbf{u}(x)$, число линейно-независимых элементов n которого определяется порядком дифференциального уравнения колебаний: для продольных колебаний стержневых концентраторов $n = 2$, для изгибных колебаний кольцевых концентраторов $n = 6$. Здесь x может быть как линейной координатой в случае стержневых концентраторов, так и угловой (дуговой) координатой в случае кольцевых концентраторов. Под **передаточной матрицей** понимают матрицу размером $n \times n$, связывающую между собой вектор параметров колебаний во входном поперечном сечении концентратора $x = 0$ и произвольно взятом поперечном сечении x:

$$\mathbf{u}(x, f) = \mathbf{T}(x, f)\mathbf{u}(0), \tag{1}$$

где f – частота колебаний.

Существование и единственность передаточной матрицы вытекают из существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения колебаний.

Если представить дифференциальное уравнение колебаний в виде эквивалентной системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x, f)\mathbf{u}(x, f), \tag{2}$$

где $\mathbf{A}$ – матрица, вид которой определяется формой концентратора, то передаточная матрица будет удовлетворять матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x, f)\mathbf{T}(x, f) \tag{3}$$

с граничным условием $\mathbf{T}(0, f) = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

В случае выполнения условия Лаппо-Данилевского

$$\mathbf{A}(x,f)\int_0^x \mathbf{A}(x,f)\mathrm{d}x = \int_0^x \mathbf{A}(x,f)\mathrm{d}x \cdot \mathbf{A}(x,f) \tag{4}$$

решение уравнения (3) может быть представлено в виде матричной экспоненциальной функции [6]

$$\mathbf{T}(x,f) = \exp(\mathbf{A}(x,f)x)\,. \tag{5}$$

Передаточная матрица, записанная с использованием уравнения (5), может быть выражена через экспоненциальные функции скалярного аргумента с помощью теоремы о спектральном разложении матричных функций (формулы Лагранжа–Сильвестра) [7]:

$$\mathbf{T}(x) = \sum_{k=1}^{n} \exp(\lambda_k x) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{\mathbf{A}-\lambda_i \mathbf{I}}{\lambda_k - \lambda_i}\,, \tag{6}$$

где λ_k – собственные значения матрицы **A**.

В качестве объекта исследования рассмотрим половину составного кольцевого концентратора с прямоугольным поперечным сечением, состоящего из двух сегментов и имеющего нижнюю половину зеркально симметричную по отношению к верхней (рис. 1).

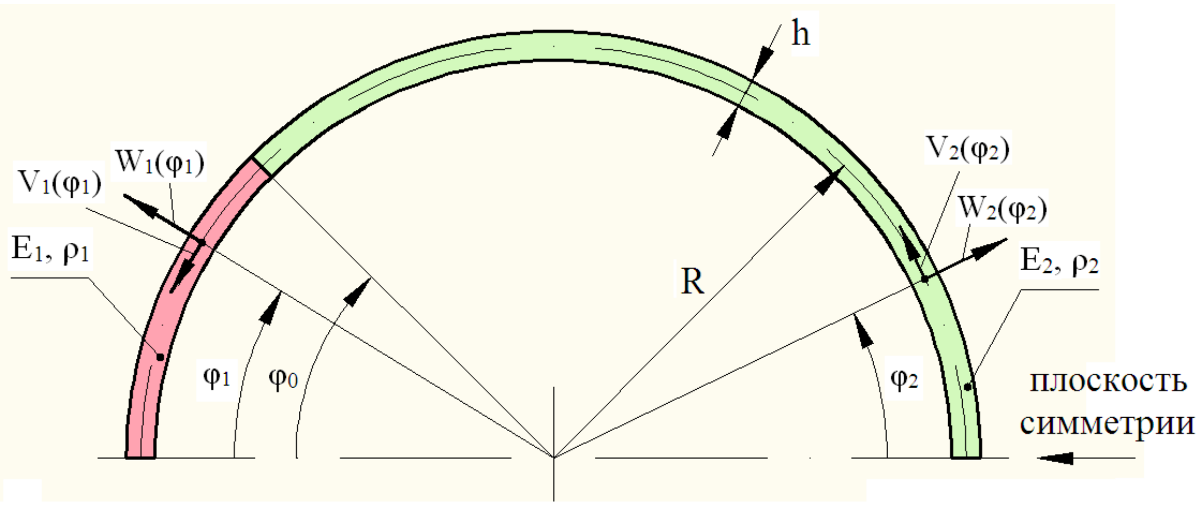

Рис. 1. Расчетная схема конструкции составного кольцевого концентратора

В качестве вектора параметров колебаний для кольцевого сегмента может быть принят вектор

$$\mathbf{u}(\varphi) = \left(V(\varphi) \quad W(\varphi) \quad \psi(\varphi) \quad N(\varphi) \quad M(\varphi) \quad Q(\varphi)\right)^{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

где φ – угловая координата, $V(\varphi)$ – амплитуда тангенциальных колебательных смещений, $W(\varphi)$ – амплитуда радиальных колебательных смещений, $\psi(\varphi)$ – амплитуда угла поворота поперечного сечения, $N(\varphi)$ – амплитуда продольной силы, $M(\varphi)$ – амплитуда момента, $Q(\varphi)$ – амплитуда поперечной силы.

Параметры $\psi(\varphi)$, $N(\varphi)$, $M(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ при использовании уравнений колебаний балок типа Эйлера–Бернулли определяются выражениями

$$\psi(\varphi) = (1/R)(\mathrm{d}W/\mathrm{d}\varphi + V), \tag{8}$$

$$N(\varphi) = (ES/R)(\mathrm{d}V/\mathrm{d}\varphi - W), \tag{9}$$

$$M(\varphi) = (EJ/R^2)(\mathrm{d}V/\mathrm{d}\varphi + \mathrm{d}^2W/\mathrm{d}\varphi^2), \tag{10}$$

$$Q(\varphi) = -(EJ/R^3)(\mathrm{d}^3W/\mathrm{d}\varphi^3 + \mathrm{d}^2V/\mathrm{d}\varphi^2), \tag{11}$$

где R – радиус кривизны срединной цилиндрической поверхности сегмента, E – модуль продольной упругости материала сегмента, S – площадь поперечного сечения сегмента, J – осевой момент инерции поперечного сечения сегмента.

При использовании уравнений колебаний балок типа Тимошенко параметр $\psi(\varphi)$ является независимым, параметр $N(\varphi)$ определяется выражением (9), а параметры $M(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ определяются выражениями [8]

$$M(\varphi) = (EJ/R)\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\varphi, \tag{12}$$

$$Q(\varphi) = K_s GS\left(\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{V}{R} - \psi\right), \tag{13}$$

где K_s – коэффициент сдвига, зависящий от формы поперечного сечения сегмента и определяемый как отношение средней сдвиговой деформации сечения Q/GS к сдвиговой деформации $(1/R)(\mathrm{d}W/\mathrm{d}\varphi + V) - \psi$ в центроиде сечения, G – модуль сдвиговой упругости. Для балок с прямоугольным поперечным сечением коэффициент сдвига принимается равным 5/6.

Для однородного кольцевого сегмента с постоянными по длине параметрами поперечного сечения матрица **A**, входящая в уравнение (2), при использовании уравнений типа Эйлера–Бернулли будет определяться выражением

$$\mathbf{A}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & R/ES & 0 & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R/EJ & 0 \\ -EJ\xi(f)/R^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R \\ 0 & -EJ\xi(f)/R^3 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $\xi(f) = SR^2 f^2 / Jf_0^2$ – безразмерный частотный параметр, $f_0 = (1/2\pi R)\sqrt{E/\rho}$, ρ – плотность материала сегмента.

Матрица **A** в рассматриваемом случае зависит только от частоты и удовлетворяет условию (4).

При использовании уравнений типа Тимошенко матрица **A** будет определяться выражением

$$\mathbf{A}(f)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & R/ES & 0 & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & 0 & R/K_SGS \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R/EJ & 0 \\ -EJ\xi(f)/R^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -EJ^2\xi(f)/SR^3 & 0 & 0 & -R \\ 0 & -EJ\xi(f)/R^3 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Матрицы (14) и (15) имеют собственные значения вида

$$\lambda_1=\sqrt{\zeta_1}\,,\ \lambda_2=-\sqrt{\zeta_1}\,,\ \lambda_3=\sqrt{\zeta_2}\,,\ \lambda_4=-\sqrt{\zeta_2}\,,\ \lambda_5=\sqrt{\zeta_3}\,,\ \lambda_6=-\sqrt{\zeta_3}\,, \quad (16)$$

где ζ_1, ζ_2, ζ_3 – корни кубического уравнения

$$\zeta^3+(2+p\xi)\zeta^2+(1-\xi-p\xi)\zeta+\xi(1-p\xi)=0 \quad (17)$$

(в случае использования уравнений типа Эйлера–Бернулли) или

$$\begin{gathered}\zeta^3+(2+p(2+q)\xi)\zeta^2+(1-\xi+p(1-q)\xi+p^2(1+2q)\xi^2)\zeta+ \\ +\xi(1+p-p(p(1+q)+1)\xi+p^3q\xi^2)=0\end{gathered} \quad (18)$$

(в случае использования уравнений типа Тимошенко),

$p=J/SR^2$ – безразмерный геометрический параметр, $q=E/K_SG$.

Характер корней уравнений (17) и (18) изменяется при некоторых пороговых значениях ξ_L, ξ_M и ξ_U частотного параметра ξ: в случае $\xi\le\xi_L$ уравнения имеют три действительных отрицательных корня, при $\xi_L<\xi\le\xi_M$ – один действительный отрицательный и два комплексно сопряженных корня, при $\xi_M<\xi\le\xi_U$ – один действительный отрицательный и два действительных положительных корня, при $\xi_U<\xi$ – два действительных отрицательных и один действительный положительный корень.

Предполагая, что все корни являются действительными (что справедливо для высоких частот *f*), то есть $\xi_M<\xi$, расположим корни в порядке возрастания: $\zeta_1<\zeta_2<\zeta_3$. В этом случае при $\xi_M<\xi\le\xi_U$ собственные значения λ_1 и λ_2 будут являться мнимыми, а $\lambda_3 ... \lambda_6$ – действительными, а при $\xi_U<\xi$ собственные значения $\lambda_1 ... \lambda_4$ будут мнимыми, а λ_5 и λ_6 – действительными.

Для исключения из выражения (6) функций комплексной переменной, соответствующих мнимым собственным значениям, удобно записать его в виде

$$\mathbf{T}(\varphi, f) = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{C}_k(\varphi, f), \tag{19}$$

где матрицы $\mathbf{C}_k(\varphi, f)$ определяются выражением

$$\mathbf{C}_k(\varphi, f) = \exp(\lambda_{2k-1}(f)\varphi) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2k-1}}^{6} \frac{\mathbf{A}(f) - \lambda_i(f)\mathbf{I}}{\lambda_{2k-1}(f) - \lambda_i(f)} + \exp(\lambda_{2k}(f)\varphi) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2k}}^{6} \frac{\mathbf{A}(f) - \lambda_i(f)\mathbf{I}}{\lambda_{2k}(f) - \lambda_i(f)}. \tag{20}$$

При $\xi_M < \xi \le \xi_U$ матрицы $\mathbf{C}_k(\varphi, f)$ можно представить в виде

$$\mathbf{C}_1(\varphi, f) = \left(\frac{\mathbf{A}\sin(\sqrt{|\zeta_1|}\varphi)}{\sqrt{|\zeta_1|}} + \mathbf{I}\cos(\sqrt{|\zeta_1|}\varphi) \right) \frac{\mathbf{A}^2 - \zeta_3\mathbf{I}}{|\zeta_1| + \zeta_3} \frac{\mathbf{A}^2 - \zeta_5\mathbf{I}}{|\zeta_1| + \zeta_5}, \tag{21}$$

$$\mathbf{C}_2(\varphi, f) = \frac{\mathbf{A}^2 + |\zeta_1|\mathbf{I}}{\zeta_3 + |\zeta_1|} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathrm{sh}(\sqrt{\zeta_3}\varphi)}{\sqrt{\zeta_3}} + \mathbf{I} \cdot \mathrm{ch}(\sqrt{\zeta_3}\varphi) \right) \frac{\mathbf{A}^2 - \zeta_5\mathbf{I}}{\zeta_3 - \zeta_5}, \tag{22}$$

$$\mathbf{C}_3(\varphi, f) = \frac{\mathbf{A}^2 + |\zeta_1|\mathbf{I}}{\zeta_5 + |\zeta_1|} \frac{\mathbf{A}^2 - \zeta_3\mathbf{I}}{\zeta_5 - \zeta_3} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathrm{sh}(\sqrt{\zeta_5}\varphi)}{\sqrt{\zeta_5}} + \mathbf{I} \cdot \mathrm{ch}(\sqrt{\zeta_5}\varphi) \right), \tag{23}$$

а при $\xi_U < \xi$ – в виде

$$\mathbf{C}_1(\varphi, f) = \left(\frac{\mathbf{A}\sin(\sqrt{|\zeta_1|}\varphi)}{\sqrt{|\zeta_1|}} + \mathbf{I}\cos(\sqrt{|\zeta_1|}\varphi) \right) \frac{\mathbf{A}^2 + |\zeta_3|\mathbf{I}}{|\zeta_1| - |\zeta_3|} \frac{\mathbf{A}^2 - \zeta_5\mathbf{I}}{|\zeta_1| + \zeta_5}, \tag{24}$$

$$\mathbf{C}_2(\varphi, f) = \frac{\mathbf{A}^2 + |\zeta_1|\mathbf{I}}{|\zeta_3| - |\zeta_1|} \left(\frac{\mathbf{A}\sin(\sqrt{|\zeta_3|}\varphi)}{\sqrt{|\zeta_3|}} + \mathbf{I}\cos(\sqrt{|\zeta_3|}\varphi) \right) \frac{\mathbf{A}^2 - \zeta_5\mathbf{I}}{|\zeta_3| + \zeta_5}, \tag{25}$$

$$\mathbf{C}_3(\varphi, f) = \frac{\mathbf{A}^2 + |\zeta_1|\mathbf{I}}{\zeta_5 + |\zeta_1|} \frac{\mathbf{A}^2 + |\zeta_3|\mathbf{I}}{\zeta_5 + |\zeta_3|} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathrm{sh}(\sqrt{\zeta_5}\varphi)}{\sqrt{\zeta_5}} + \mathbf{I} \cdot \mathrm{ch}(\sqrt{\zeta_5}\varphi) \right). \tag{26}$$

Вычисление передаточной матрицы без приведенных выше преобразований может приводить к комплексным результатам.

В случае концентратора, изображенного на рис. 1, должны выполняться граничные условия

$$V(0) = V(\pi) = 0, \tag{27}$$

$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0, \tag{28}$$

$$Q(0)=Q(\pi)=0, \tag{29}$$

что равносильно выполнению системы уравнений

$$\begin{pmatrix} T_{12}(\pi,f) & T_{14}(\pi,f) & T_{15}(\pi,f) \\ T_{32}(\pi,f) & T_{34}(\pi,f) & T_{35}(\pi,f) \\ T_{62}(\pi,f) & T_{64}(\pi,f) & T_{65}(\pi,f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(0) \\ N(0) \\ M(0) \end{pmatrix} = 0\,. \tag{30}$$

Система (30) имеет нетривиальное (не равное тождественно нулю) решение при условии

$$\det\begin{pmatrix} T_{12}(\pi,f) & T_{14}(\pi,f) & T_{15}(\pi,f) \\ T_{32}(\pi,f) & T_{34}(\pi,f) & T_{35}(\pi,f) \\ T_{62}(\pi,f) & T_{64}(\pi,f) & T_{65}(\pi,f) \end{pmatrix} = 0\,, \tag{31}$$

из которого могут быть определены собственные частоты колебаний концентратора.

Передаточная матрица составного концентратора будет определяться как произведение передаточных матриц составляющих его сегментов:

$$\mathbf{T}(\pi,f)=\mathbf{T}_2(\pi-\varphi_0,f)\mathbf{T}_1(\varphi_0,f)\,, \tag{32}$$

где φ_0 – центральный угол первого сегмента.

При известных решениях системы (30) могут быть рассчитаны собственные формы колебаний:

$$V(\varphi,f)=W(0)T_{12}(\varphi,f)+N(0)T_{14}(\varphi,f)+M(0)T_{15}(\varphi,f)\,, \tag{33}$$

$$W(\varphi,f)=W(0)T_{22}(\varphi,f)+N(0)T_{24}(\varphi,f)+M(0)T_{25}(\varphi,f)\,. \tag{34}$$

Специфическими особенностями матрицы, входящей в систему (30), являются близость ее строк к пропорциональности и плохая обусловленность. В связи с этим преобразуем входящую в систему (30) матрицу следующим образом:

$$\begin{pmatrix} T_{12}(\pi,f) & T_{14}(\pi,f) & T_{15}(\pi,f) \\ T_{32}(\pi,f)\cdot\dfrac{T_{15}(\pi,f)}{T_{35}(\pi,f)}-T_{12}(\pi,f) & T_{34}(\pi,f)\cdot\dfrac{T_{15}(\pi,f)}{T_{35}(\pi,f)}-T_{14}(\pi,f) & 0 \\ T_{62}(\pi,f)\cdot\dfrac{T_{15}(\pi,f)}{T_{65}(\pi,f)}-T_{12}(\pi,f) & T_{64}(\pi,f)\cdot\dfrac{T_{15}(\pi,f)}{T_{65}(\pi,f)}-T_{14}(\pi,f) & 0 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

то есть умножим вторую и третью строки на коэффициенты пропорциональности строк, равные отношению последнего элемента первой строки к последнему элементу второй и третьей строк, а затем вычтем из второй и третьей строк первую строку (преобразование относительно первой строки).

В случае идеальной пропорциональности строк исходной матрицы все элементы второй и третьей строк матрицы (35) были бы равны нулю. В действительности первый и второй элементы оказываются отличными от нуля, что говорит о наличии отклонений от пропорциональности.

Численный анализ показывает, что определитель подматрицы

$$\begin{pmatrix} T_{32}(\pi,f)\cdot\dfrac{T_{15}(\pi,f)}{T_{35}(\pi,f)}-T_{12}(\pi,f) & T_{34}(\pi,f)\cdot\dfrac{T_{15}(\pi,f)}{T_{35}(\pi,f)}-T_{14}(\pi,f) \\ T_{62}(\pi,f)\cdot\dfrac{T_{15}(\pi,f)}{T_{65}(\pi,f)}-T_{12}(\pi,f) & T_{64}(\pi,f)\cdot\dfrac{T_{15}(\pi,f)}{T_{65}(\pi,f)}-T_{14}(\pi,f) \end{pmatrix} \tag{36}$$

на собственных частотах стремится к нулю, а ее число обусловленности стремится к бесконечности, в связи с чем величину амплитуды $W(0)$ можно задать произвольным образом, а величина амплитуды $N(0)$ будет выражаться через нее формулой

$$N(0)=\frac{-T_{32}(\pi,f)\cdot\dfrac{T_{15}(\pi,f)}{T_{35}(\pi,f)}+T_{12}(\pi,f)}{T_{34}(\pi,f)\cdot\dfrac{T_{15}(\pi,f)}{T_{35}(\pi,f)}-T_{14}(\pi,f)}W(0)\,. \tag{37}$$

Величина амплитуды $M(0)$ при известных значениях амплитуд $W(0)$ и $N(0)$ может быть определена по формуле

$$M(0)=-\frac{T_{12}(\pi,f)}{T_{15}(\pi,f)}W(0)-\frac{T_{14}(\pi,f)}{T_{15}(\pi,f)}N(0)\,. \tag{38}$$

Как следует из численного анализа, при преобразовании матрицы, входящей в систему (30), относительно второй и третьей строк определители подматриц, составленных из ненулевых элементов строк, содержащих нули, так же, как и в случае преобразования относительно первой строки, стремятся к нулю на собственных частотах, а их числа обусловленности стремятся к бесконечности. Исследование входящей в систему (35) матрицы с помощью метода сингулярного разложения (SVD-разложения) показывает, что она имеет два нулевых или близких к нулю сингулярных числа, в связи с чем ранг рассматриваемой матрицы равен единице и система (35) имеет два линейно независимых частных решения, представляющие собой правые сингулярные векторы матрицы, соответствующие нулевым или близким к нулю сингулярным числам. Расчеты показывают, что частное решение системы (35), определяемое формулами (37) и (38) при произвольном задании амплитуды $W(0)$, является линейной комбинацией частных решений, найденных с помощью SVD-разложения, то есть результаты расчетов амплитуд двумя различными методами не противоречат друг другу.

2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В качестве численного примера рассмотрим расчет собственных частот и форм колебаний составного кольцевого концентратора со следующими параметрами: радиус срединной поверхности $R = 29$ мм, толщина в радиальном направлении $h = 2$ мм, толщина в осевом направлении $b = 2$ мм, модули упругости материалов сегментов $E_1 = 2{,}1\cdot10^{11}$ Па (сталь) и $E_2 = 1{,}3\cdot10^{11}$ Па (бронза), плотности материалов сегментов $\rho_1 = 7800$ кг/м^3 и $\rho_2 = 8300$ кг/м^3, центральный угол первого сегмента $2\varphi_0 = \pi/2$. Собственные частоты и формы колебаний концентратора с приведенными значениями параметров ранее были определены на основе решения дифференциальных уравнений колебаний кольцевых сегментов [4], что позволяет провести сравнительный анализ полученных результатов. На рис. 2 приведены резонансные кривые концентратора в диапазоне частот 20…40 кГц, рассчитанные на основе уравнений типа Эйлера–Бернулли (кривая 1) и Тимошенко (кривая 2), где $\mathbf{M}(f)$ – матрица, входящая в систему уравнений (30).

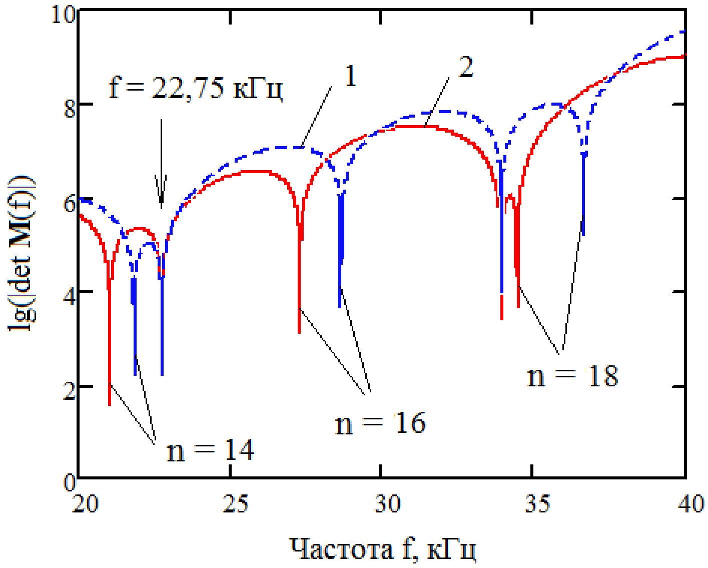

Рис. 2. Расчетные резонансные кривые концентратора

Собственным частотам соответствуют точки, в которых $\lg(|\det \mathbf{M}(f)|) \to -\infty$. Резонансные кривые, рассчитанные на основе различных типов уравнений колебаний, качественно совпадают, однако более точные значения собственных частот получаются при использовании уравнений типа Тимошенко. На рис. 3 приведены расчетные собственные формы колебаний для собственных частот 21,03 кГц (кривая 1) и 22,75 кГц (кривая 2).

Как следует из рис. 3, собственные формы колебаний можно разделить на два типа: 1) собственные формы со знакопеременной амплитудой W; 2) собственные формы со знакопостоянной амплитудой W. При этом усиление колебаний по амплитуде обеспечивают только собственные формы второго типа. Количество узловых точек амплитуды W для собственных форм со знакопеременной амплитудой обозначено на рис. 2 параметром n. Собственные формы со знакопеременной амплитудой качественно напоминают собственные формы колебаний однородного кольца, отличаясь от них тем, что на границе раздела сегментов (отмечена на рис. 3 точкой с $\varphi = 45°$) происходит изменение длины волны (полуволны обозначены как $\lambda_1/2$ и $\lambda_2/2$ на рис. 3).

Результаты, полученные на основе прямого решения дифференциальных уравнений колебаний [4], хорошо согласуются с результатами расчетов методом передаточных матриц, что подтверждает достоверность полученных результатов.

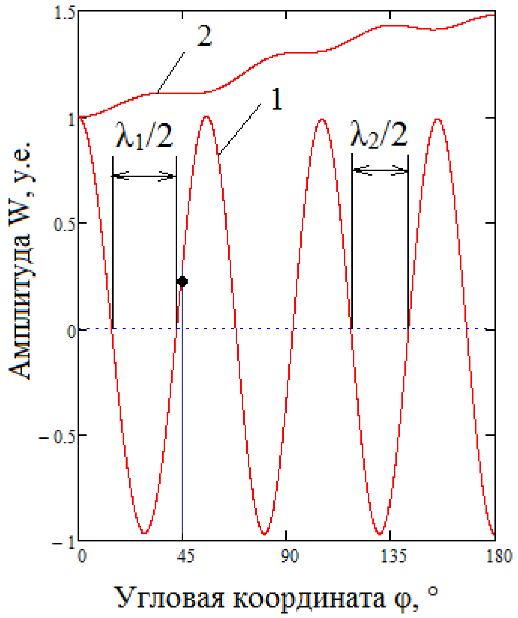

Рис. 3. Расчетные собственные формы колебаний концентратора

Как отмечалось ранее [4], несмотря на незначительный коэффициент усиления (в рассматриваемом примере $K = 1{,}53$ на частоте 21,03 кГц), применение кольцевых концентраторов в сочетании с традиционно используемыми стержневыми концентраторами позволяет обеспечить достаточно высокую амплитуду колебательных смещений рабочего инструмента (35,7 мкм в рассматриваемом примере с учетом пределов выносливости материалов сегментов) без существенного увеличения габаритных размеров и массы колебательной системы. Усиление колебаний по амплитуде обеспечивается при их введении в сегмент с более высоким волновым сопротивлением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в статье методика инженерного расчета составных кольцевых концентраторов позволяет проводить их расчет и проектирование без использования теории дифференциальных уравнений, что снижает требования к квалификации расчетчика. На основе результатов численного анализа установлено, что усиление колебаний по амплитуде обеспечивается на частотах, соответствующих знакопостоянным собственным формам колебаний концентратора, а знакопеременные собственные формы качественно напоминают собственные формы колебаний однородного кольца и не обеспечивают усиления колебаний по амплитуде.

В дальнейшем планируются оптимизация составных кольцевых концентраторов по коэффициенту усиления и проведение их экспериментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степаненко, Д.А. Влияние формы кольцевого концентратора ультразвуковой системы на коэффициент усиления амплитуды колебаний / Д.А. Степаненко, И.В. Луговой, В.П. Луговой // Наука и техника. – 2016. – № 3. – С. 209-215.
2. Степаненко, Д.А. Разработка и исследование нового типа концентраторов ультразвуковых колебаний на основе кольцевых упругих элементов / Д.А. Степаненко, В.Т. Минченя, В.П. Луговой, И.В. Луговой // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2013. – Т. 18, № 2. – С. 90-94.
3. Луговой, И.В. Упругие характеристики кольцевых концентраторов ультразвуковых систем / И.В. Луговой, В.П. Луговой // Наука и техника – 2014. – № 3. – С. 24-27.
4. Степаненко, Д.А. Теоретическое обоснование возможности усиления ультразвуковых колебаний с помощью составных кольцевых упругих элементов / Д.А. Степаненко, А.С. Емельянова, М.А. Плескач, Н.В. Солодкая // Электронный журнал «Техническая акустика». – 2017, 2. – 13 с.
5. Степаненко, Д.А. Исследование продольных колебаний гибких ультразвуковых волноводов с помощью метода передаточных матриц / Д.А. Степаненко, В.Т. Минченя, Н.Т. Минченя // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – №2 (15). – С. 71–75.
6. Лаппо-Данилевский, И.А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / И.А. Лаппо-Данилевский. – М.: Гостехтеориздат, 1957. – 456 с.
7. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
8. Lin, S.M. Closed-form solutions for dynamic analysis of extensional circular Timoshenko beams with general elastic boundary conditions / S.M. Lin, S.Y. Lee // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38. – P. 227–240.