

Д. А. Степаненко, В. И. Жуков, А. С. Роговцова

*Белорусский национальный технический университет,
Республика Беларусь, 220086, г. Минск, пр. Независимости, 65; e-mail: stepd@tut.by*

Расчет и проектирование стержневых ультразвуковых концентраторов с помощью метода гармонического баланса

Получена 21.05.2019, опубликована 12.07.2019

Рассмотрено применение метода гармонического баланса для решения задач расчета и проектирования стержневых концентраторов ультразвуковых колебаний. Для применения метода гармонического баланса функция, характеризующая распределение параметров колебаний по длине концентратора, и функция, описывающая профиль продольного сечения концентратора, продлеваются чётным образом на отрезке $[-L; +L]$, где L – длина концентратора, и представляются в виде многочленов Фурье. Уравнение продольных колебаний концентратора представляется в виде неоднородного интегро-дифференциального уравнения, которое с помощью метода гармонического баланса сводится к неоднородной системе линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы с наименьшей нормой определяется с помощью псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза и дает коэффициенты многочлена Фурье для функции, характеризующей распределение параметров колебаний по длине концентратора. Приводятся численные примеры использования разработанной методики для решения задач расчета и проектирования конического концентратора и составного концентратора для ультразвуковой сварки электрических выводов изделий микроэлектронной техники. Полученные результаты хорошо согласуются с параметрами, рассчитанными по известным из литературы формулам для конического концентратора и с помощью метода передаточных матриц для составного концентратора (относительная погрешность расчета амплитуды колебательных смещений составила 0,2 % для конического концентратора при количестве гармоник $N = 4$ и 0,8 % для составного концентратора при количестве гармоник $N = 7$).

Ключевые слова: стержневой концентратор, ультразвуковые колебания, метод гармонического баланса, многочлены Фурье

ВВЕДЕНИЕ

Стержневые концентраторы в виде стержней с переменной по длине площадью поперечного сечения широко используются в ультразвуковой технике и технологии для усиления ультразвуковых колебаний по амплитуде. Продольные колебания стержневых концентраторов описываются с помощью дифференциального уравнения Вебстера второго порядка [1, с. 21]. Для концентраторов некоторых типов (ампульных,

конических, экспоненциальных и катеноидальных) уравнение Вебстера может быть проинтегрировано в квадратурах и на основе этого получены расчетные формулы для определения их основных параметров, таких как резонансная длина и коэффициент усиления колебаний по амплитуде. Для остальных типов концентраторов уравнение Вебстера решается с помощью численных методов решения дифференциальных уравнений, либо применяется метод конечных элементов (МКЭ). В данной статье рассматривается оригинальная методика решения задач расчета и проектирования стержневых концентраторов, основанная на применении метода гармонического баланса, то есть на представлении функции, характеризующей распределение параметров колебаний по длине концентратора, и функции, описывающей профиль продольного сечения концентратора, в виде многочленов Фурье (усеченных рядов Фурье, получаемых при учете ограниченного числа гармоник полного ряда). Оригинальность предложенной методики заключается в ее полуаналитическом характере, состоящем в представлении решения уравнения Вебстера в виде взвешенной суммы аналитически заданных функций (гармоник многочлена Фурье) с весовыми коэффициентами (амплитудами гармоник), определяемыми численным путем. По сравнению с численными методами полуаналитические методы обладают повышенной производительностью и являются более гибкими с точки зрения возможности анализа и оптимизации получаемых решений, что делает разработку подобных методов актуальной, несмотря на наличие широкого спектра численных методов расчета и проектирования концентраторов. Недостаточно высокая производительность известных численных методов объясняется тем, что большинство из них основаны на одномерной или трехмерной (в случае МКЭ) дискретизации уравнения колебаний, что в случае МКЭ дает систему алгебраических уравнений с большим количеством неизвестных, определяемым числом узлов дискретизации, в то время как предлагаемая методика приводит к системе алгебраических уравнений с малым количеством неизвестных, определяемым числом гармоник многочлена Фурье. В связи с тем, что функция распределения амплитуды колебательных смещений по длине концентратора при периодическом продолжении будет иметь точки разрывов, в которых ряд Фурье не будет сходиться к истинному значению функции, она предварительно продлевается четным образом на отрезке $[-L; +L]$, где L – длина концентратора. Применение предложенной методики является перспективным для решения задач расчета и проектирования кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний [2], для которых периодичность и непрерывность функций распределения параметров колебаний являются естественными свойствами, вытекающими из их кольцевой геометрии: результаты исследований в этом направлении будут отражены в дальнейших публикациях.

1. МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Представим уравнение продольных колебаний концентратора в виде интегро-дифференциального уравнения:

$$u'S^{-1} = -k_0^2 \left(\xi_0 + \int_0^x uS^{-1} dx \right), \quad (1)$$

где $u = S\xi'$, $S(x)$ – площадь поперечного сечения концентратора, $\xi(x)$ – амплитуда продольных колебательных смещений, $\xi_0 = \xi(0)$ – амплитуда колебательных смещений во входном сечении концентратора, $k_0 = 2\pi f/c$ – волновое число, f – частота колебаний, c – скорость продольной ультразвуковой волны в материале концентратора.

В отличие от дифференциального уравнения Вебстера второго порядка, которое обычно используется для описания продольных колебаний стержневых концентраторов ультразвука, уравнение (1) является неоднородным: неоднородность создается слагаемым $-k_0^2\xi_0$ в правой части уравнения. В дальнейшем при исследовании уравнения (1) методом гармонического баланса оно будет сводиться к системе неоднородных алгебраических уравнений (см. уравнение (19)), что упрощает расчет собственных форм колебаний: в случае решения однородных дифференциальных уравнений колебаний собственные формы колебаний определяются из системы однородных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей, что требует применения специальных методов решения таких систем, например, метода сингулярного разложения (SVD-разложения) [2]. Уравнение (1) решается при граничном условии $u(0) = u(L) = 0$.

Уравнение вида (1) ранее использовалось для расчета элементов стержневых концентраторов в виде галтелей, для которых производная S' , входящая в уравнение Вебстера, может обращаться в бесконечность [3, с. 106-107]. Из литературы также известны примеры описания колебаний механических систем с распределенными параметрами с помощью интегральных уравнений [4, с. 401-403].

Для решения уравнения (1) воспользуемся методом гармонического баланса, для чего представим его решение $u(x)$ и входящую в уравнение функцию $S^{-1}(x)$ в виде многочленов Фурье. Для этого продолжим функции $\xi(x)$ и $S^{-1}(x)$ четным образом на отрезке $[-L; +L]$: при таком продолжении функции $\xi(x)$ и $S^{-1}(x)$ будут непрерывны на краях отрезка $[-L; +L]$. На отрезке $[-L; +L]$ многочлен Фурье функции $u(x)$ будет содержать только синусы, а многочлен Фурье функции $S^{-1}(x)$ – только косинусы и постоянную составляющую:

$$u(x) = \sum_{i=1}^N b_i \sin\left(\frac{\pi i x}{L}\right), \quad (2)$$

$$u'(x) = \frac{\pi}{L} \sum_{i=1}^N i b_i \cos\left(\frac{\pi i x}{L}\right), \quad (3)$$

$$S^{-1}(x) = \sum_{i=0}^{2N} a_i \cos\left(\frac{\pi i x}{L}\right). \quad (4)$$

Любое решение уравнения (1), представленное в виде (2), автоматически удовлетворяет граничное условие $u(0) = u(L) = 0$.

Коэффициенты a_i многочлена Фурье функции $S^{-1}(x)$ вычисляются по известным формулам для коэффициентов ряда Фурье (при этом функция может быть задана как аналитически, так и численно), а коэффициенты b_i являются неизвестными величинами, к отысканию которых сводится решение уравнения (1). В разложении (4) учтено $2N$ гармоник, а в разложениях (2) и (3) – N гармоник, что упрощает вычисление свёртки коэффициентов многочлена (4) с коэффициентами многочленов (2) и (3) (см. дальнейший анализ).

Так как функции, заданные многочленами Фурье (2)-(4), входят в уравнение (1) в виде произведений, то рассмотрим произведение двух функций $y_1(x) = S^{-1}(x)$ и $y_2(x)$ ($y_2(x) = u(x)$ или $y_2(x) = u'(x)$) с периодом $2L$, представленных в виде многочленов Фурье с комплексными коэффициентами:

$$y_1(x) = \sum_{i=-2N}^{2N} c_i^{(1)} \exp\left(\frac{j\pi i x}{L}\right), \tag{5}$$

$$y_2(x) = \sum_{i=-N}^N c_i^{(2)} \exp\left(\frac{j\pi i x}{L}\right), \tag{6}$$

где j – мнимая единица.

Коэффициенты соответствующего произведению $y_1(x)y_2(x)$ многочлена Фурье будут рассчитываться с помощью дискретной свёртки (правило Лорана, [5]):

$$c_k = c_i^{(1)} * c_i^{(2)} = \sum_{i=-N}^N c_{k-i}^{(1)} c_i^{(2)}, k = -N \dots N. \tag{7}$$

Так как индекс $k - i$ может принимать значения от $-2N$ до $2N$, то при разложении функции $S^{-1}(x)$ учтено $2N$ гармоник (см. уравнение (4)).

Для функции $y_1(x) = S^{-1}(x)$ коэффициенты многочлена Фурье с комплексными коэффициентами связаны с коэффициентами многочлена Фурье с вещественными коэффициентами формулой $c_i^{(1)} = c_{-i}^{(1)} = a_{|i|}/2$, которая вытекает из общего соотношения $c_i = (a_{|i|} - j \operatorname{sgn}(i) b_{|i|})/2$. Для функции $y_2(x) = u(x)$ связь между коэффициентами имеет вид $c_i^{(2)} = -c_{-i}^{(2)} = -j b_{|i|}/2$, $c_0^{(2)} = 0$, а для функции $y_2(x) = u'(x)$ выполняются соотношения $c_i^{(2)} = c_{-i}^{(2)} = \pi |i| b_{|i|}/2L$, $c_0^{(2)} = 0$. При $y_2(x) = u(x)$ формула (7) принимает вид

$$c_k = \sum_{i=1}^N (c_{k-i}^{(1)} - c_{k+i}^{(1)}) c_i^{(2)}, k = 1..N, \tag{8}$$

$$c_{-k} = -c_k, c_0 = 0,$$

а при $y_2(x) = u'(x)$

$$c_k = \sum_{i=1}^N (c_{k-i}^{(1)} + c_{k+i}^{(1)})c_i^{(2)}, k = 1..N, \tag{9}$$

$$c_{-k} = c_k, c_0 = \sum_{i=1}^N (c_{-i}^{(1)} + c_i^{(1)})c_i^{(2)}.$$

Если обозначить через B_k и A_k коэффициенты многочленов Фурье с вещественными коэффициентами для функций $S^{-1}(x)u(x)$ и $S^{-1}(x)u'(x)$, то уравнения (8) и (9) можно будет записать через вещественные коэффициенты:

$$B_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (a_{|k-i|} - a_{k+i})b_i, k = 1..N, \tag{10}$$

$$A_k = \frac{\pi}{2L} \sum_{i=1}^N i(a_{|k-i|} + a_{k+i})b_i, k = 0..N. \tag{11}$$

Входящий в уравнение (1) интеграл с учетом выражения (10) может быть записан в виде

$$\int_0^x uS^{-1} dx = -\frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{B_k}{k} \cos\left(\frac{\pi kx}{L}\right) + \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{B_k}{k}. \tag{12}$$

Среднее значение интеграла на отрезке $[-L; +L]$ будет определяться формулой

$$\left\langle \int_0^x uS^{-1} dx \right\rangle = \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{B_k}{k}. \tag{13}$$

Так среднее значение правой части уравнения (1) на отрезке $[-L; +L]$ должно быть равно среднему значению его левой части, то есть

$$\langle u'S^{-1} \rangle = -k_0^2 \left(\xi_0 + \left\langle \int_0^x uS^{-1} dx \right\rangle \right), \tag{14}$$

то с учетом равенства (13) получим

$$\frac{\pi}{2L} \sum_{i=1}^N i a_i b_i + \frac{k_0^2 L}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{B_k}{k} = -k_0^2 \xi_0. \tag{15}$$

В уравнении (15) учтено, что $\langle u'S^{-1} \rangle = A_0/2$, где A_0 определяется формулой (11).

Подставляя в уравнение (15) выражение (10) для коэффициентов B_k , получим

$$\frac{\pi}{2L} \sum_{i=1}^N i a_i b_i + \frac{k_0^2 L}{2\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} (a_{|k-i|} - a_{k+i}) b_i = -k_0^2 \xi_0. \tag{16}$$

Выражение (16) может рассматриваться как условие равенства постоянных составляющих в правой и левой частях уравнения (1), представленных в виде многочленов Фурье. Условие равенства амплитуд k -х гармоник в правой и левой частях уравнения (1) (условие гармонического баланса) будет иметь вид

$$\frac{\pi}{2L} \sum_{i=1}^N i(a_{|k-i|} + a_{k+i})b_i - \frac{k_0^2 L}{\pi} \frac{B_k}{k} = 0, k = 1..N \quad (17)$$

или с учетом выражения (10)

$$\frac{\pi}{L} \sum_{i=1}^N i(a_{|k-i|} + a_{k+i})b_i - \frac{k_0^2 L}{\pi k} \sum_{i=1}^N (a_{|k-i|} - a_{k+i})b_i = 0. \quad (18)$$

Уравнения (16) и (18) образуют неоднородную систему из $N + 1$ линейного уравнения относительно N неизвестных коэффициентов b_i (коэффициентов многочлена Фурье функции $u(x)$):

$$\mathbf{M}\mathbf{b} = \mathbf{v}, \quad (19)$$

где $\mathbf{v} = (-k_0^2 \zeta_0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T$ (N нулей), $\mathbf{b} = (b_1 \quad \dots \quad b_N)^T$, а элементы матрицы \mathbf{M} определяются выражениями

$$M_{ki} = \left(\frac{\pi i}{L} - \frac{k_0^2 L}{\pi k} \right) a_{|k-i|} + \left(\frac{\pi i}{L} + \frac{k_0^2 L}{\pi k} \right) a_{k+i}, k = 1 \dots N, \quad (20)$$

$$M_{0i} = \frac{\pi i}{2L} a_i + \frac{k_0^2 L}{2\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} (a_{|k-i|} - a_{k+i}).$$

Система (19) является переопределенной и всегда имеет решение в смысле наименьших квадратов, которое может не являться единственным:

$$\mathbf{b}^* = \arg \min_{\mathbf{b}} \|\mathbf{M}\mathbf{b} - \mathbf{v}\|, \quad (21)$$

где $\|\cdot\|$ – норма Фробениуса.

Решение системы (19) с наименьшей нормой $\|\mathbf{b}^*\|$ является единственным и определяется формулой [6]

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{M}^\dagger \mathbf{v}, \quad (22)$$

где $\mathbf{M}^\dagger = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T$ – псевдообратная (обобщенная обратная) матрица Мура-Пенроуза.

Для расчета резонансных частот концентратора при заданной длине L (задача расчета концентратора) рассчитываются решения системы (19) для ряда значений частоты f , а затем из них выбирается решение, для которого величина $|\zeta(L, f)|$ принимает максимальное значение, то есть

$$f_{\text{рез}} = \arg \max_f \left| \zeta_0 + \frac{2L}{\pi} \sum_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2} \right]} \frac{B_{2k-1}(f)}{2k-1} \right|, \quad (23)$$

где $[\cdot]$ – целая часть.

Аналогичным образом решается обратная задача расчета резонансной длины $L_{\text{рез}}$ при заданной частоте f (задача проектирования концентратора).

2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В качестве простого численного примера, позволяющего верифицировать предложенную методику расчета, была рассмотрена задача определения основной собственной формы продольных колебаний конического концентратора со следующими параметрами: диаметр входного сечения $d_0 = 10$ мм, отношение диаметров $N_d = 2,5$, длина $L = 140$ мм, резонансная частота продольных колебаний $f = 20$ кГц, скорость продольной волны в материале концентратора $c = 5200$ м/с, амплитуда колебательных смещений во входном сечении $\xi_0 = 1$ мкм. При количестве гармоник $N = 3$ относительное отклонение расчетного значения амплитуды колебательных смещений в выходном сечении концентратора от значения амплитуды, рассчитанного по известным формулам для конического концентратора [3, с. 109], составило 1,2 %, а при $N = 4 - 0,2$ %.

В рассмотренном выше примере задавались как длина L концентратора, так и его резонансная частота f . На практике один из этих параметров является заданным, а второй подлежит определению. Например, при заданной длине концентратора $L = 140$ мм резонансные частоты определялись из приведенного на рис. 1 расчетного графика зависимости амплитуды колебательных смещений $\zeta(L, f)$ выходного сечения концентратора от частоты f и составили 19,9 кГц для продольной моды колебаний 1-го порядка и 37,5 кГц для продольной моды колебаний 2-го порядка (в соответствии с уравнением (23) резонансные частоты соответствуют максимумам модуля амплитуды).

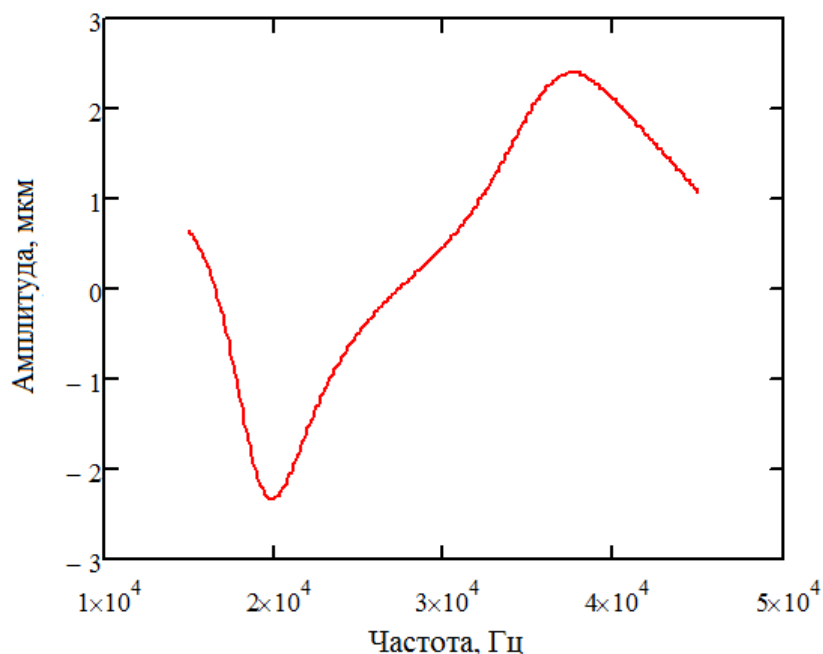


Рис. 1. Расчетная кривая зависимости амплитуды $\zeta(L, f)$ от частоты f при $L = 140$ мм

При заданной частоте $f = 20$ кГц резонансные значения длины концентратора определялись из приведенного на рис. 2 расчетного графика зависимости амплитуды

$\xi(L, f)$ от длины L и составили 139 мм для продольной моды колебаний 1-го порядка и 263 мм для продольной моды колебаний 2-го порядка.

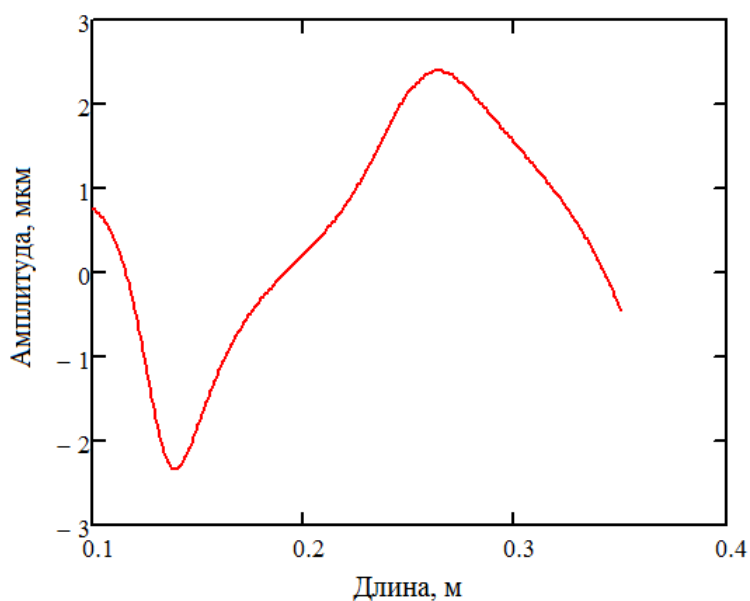


Рис. 2. Расчетная кривая зависимости амплитуды $\xi(L, f)$ от длины L при $f = 20$ кГц

На рис. 3 приведены расчетные собственные формы колебаний концентратора с $L = 140$ мм для частот 19,9 кГц (кривая 1) и 37,5 кГц (кривая 2).

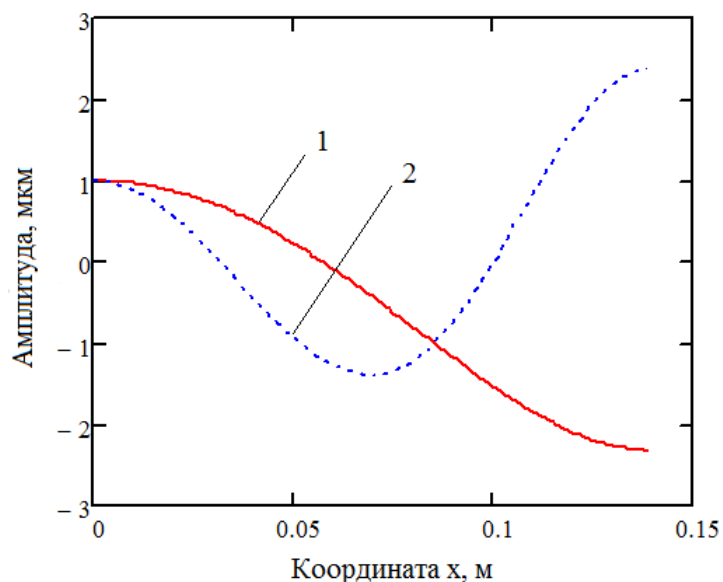


Рис. 3. Расчетные собственные формы колебаний концентратора с $L = 140$ мм

Как известно, задача расчета концентратора может быть сведена к задаче Штурма-Лиувилля на собственные значения [7]:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\xi}{dx}\right) = \lambda w(x)\xi, \tag{24}$$

где $\lambda = k_0^2$, $p(x) = w(x) = S(x)$.

Собственные функции задачи (24) должны удовлетворять обобщенному условию ортогональности [8]

$$\int_0^L \xi_n(x)\xi_m(x)w(x)dx = \delta_{nm}, \tag{25}$$

где n, m – порядки собственных функций, δ_{nm} – символ Кронекера, $\xi_n(x)$, $\xi_m(x)$ – нормированные собственные функции, определяемые выражением

$$\xi_n(x) = \frac{\zeta_n(x)}{\sqrt{\int_0^L \zeta_n^2(x)w(x)dx}}. \tag{26}$$

Проверка условия (25) для приведенных на рис. 3 расчетных собственных форм дает значение интеграла – 0,013, то есть условие ортогональности выполняется с достаточно высокой точностью, что подтверждает правильность расчета собственных форм.

В качестве более сложного примера была рассмотрена задача расчета составного концентратора для ультразвуковой сварки электрических выводов изделий микроэлектронной техники, схема конструкции которого приведена на рис. 4.

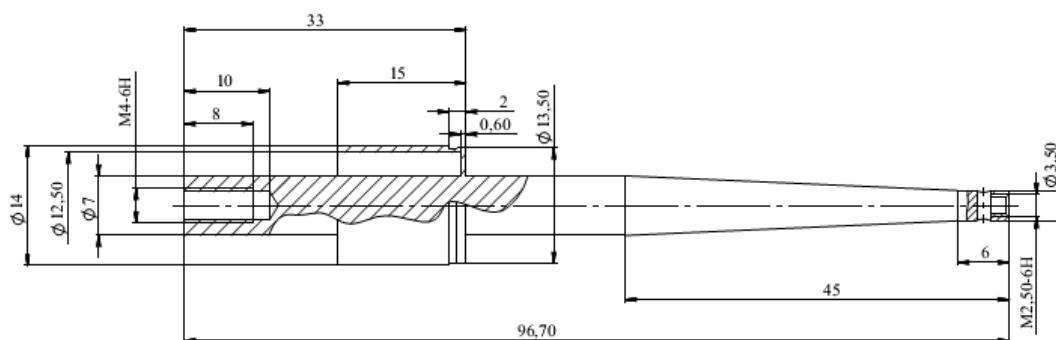


Рис. 4. Схема конструкции составного концентратора для ультразвуковой сварки

При расчете была рассмотрена упрощенная модель концентратора, состоящая из двух цилиндрических участков, соединенных между собой переходным коническим участком. При расчете были приняты следующие исходные данные: $f = 105,8$ кГц, скорость продольной волны в материале концентратора $c = 5100$ м/с, амплитуда колебательных смещений во входном сечении $\xi_0 = 1$ мкм. При количестве гармоник

$N = 7$ было получено расчетное распределение амплитуды колебательных смещений по длине концентратора, приведенное на рис. 5 (кривая 1). Для сравнения на рис. 5 приведено распределение амплитуды, рассчитанное с помощью метода передаточных матриц [9]: см. кривую 2. Относительная погрешность расчета амплитуды колебательных смещений в выходном сечении концентратора составила 0,8 %.

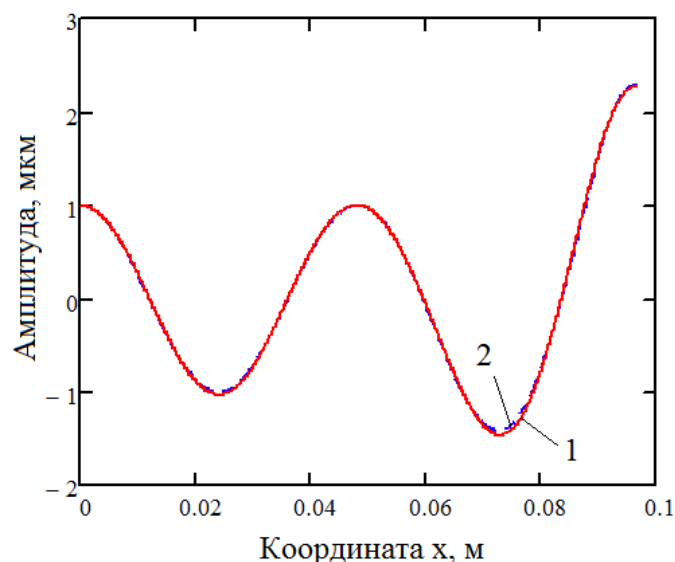


Рис. 5. Распределение амплитуды колебательных смещений по длине концентратора для ультразвуковой сварки

Использование концентратора на продольной моде колебаний 4-го порядка, которой соответствует высокая резонансная частота, позволяет повысить эффективность процесса ультразвуковой сварки и качество выполнения сварных соединений [10]. В установках ультразвуковой сварки могут применяться малогабаритные полуволновые концентраторы: применение многополуволнового концентратора в рассматриваемом случае объясняется тем, что размеры концентратора адаптировались под размеры сварочной головки серийно выпускаемой установки, в исходной модификации которой использовался концентратор с более низкой резонансной частотой, то есть необходимо было смонтировать концентратор с повышенной резонансной частотой в сварочной головке серийно выпускаемой установки без изменения ее конструкции. Увеличение числа гармоник, необходимого для получения достаточной точности решения, до $N = 7$ (по сравнению с $N = 4$ в предыдущем примере) объясняется более высоким порядком рассматриваемой продольной моды колебаний: порядок доминирующей гармоники многочлена Фурье будет совпадать с порядком рассматриваемой продольной моды, а для получения достаточной точности решения требуется учет, по меньшей мере, нескольких гармоник с порядком выше порядка доминирующей гармоники.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в статье полуаналитическая методика расчета стержневых концентраторов в отличие от известных численных методов решения уравнения Вебстера позволяет представить распределение амплитуды колебательных смещений по длине концентратора в виде взвешенной суммы малого числа (в рассмотренных примерах $N = 4...7$) аналитически заданных (косинусоидальных) функций. Подобное представление упрощает анализ и оптимизацию получаемых решений. В частности, при необходимости расчета распределения деформаций по длине концентратора вместо численного дифференцирования может использоваться аналитическое дифференцирование косинусоидальных функций, в виде взвешенной суммы которых представлено расчетное распределение амплитуды.

Как отмечалось выше, в дальнейшем планируется применение предложенной методики для решения задач расчета и проектирования кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний, для которых периодичность является естественным условием, налагаемым на распределения параметров колебаний кольцевой геометрией концентратора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ultrasonics: data, equations and their practical uses / Ed. by D. Ensminger and F.B. Stulen. – Boca Raton [etc.]: CRC Press, 2009. – 496 p.
2. Степаненко, Д.А. Теоретическое обоснование возможности усиления ультразвуковых колебаний с помощью составных кольцевых упругих элементов / Д.А. Степаненко [и др.] // Электронный журнал «Техническая акустика». – 2017, 2. – 13 с.
3. Киселев, М.Г. Ультразвук в медицине / М.Г. Киселев, В.Т. Минченя, Д.А. Степаненко. – Мн.: БНТУ, 2009. – 428 с.
4. Биргер, И.А. Соппротивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
5. Li, L. Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures / L. Li // Journal of the Optical Society of America. – 1996. – Vol. 13, No. 9. – P. 1870-1876.
6. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
7. Акуленко, Л.Д. Исследование влияния дефектов на спектры собственных частот и формы колебаний стержней / Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (2). – С. 32-33.
8. Fedotov, I. Application of eigenfunction orthogonalities to vibration problems / I. Fedotov [et al.] // Proc. of the World Congress on Engineering. – London, 2009. – Vol. II. – P. 1169-1173.
9. Степаненко, Д.А. Исследование продольных колебаний гибких ультразвуковых волноводов с помощью метода передаточных матриц / Д.А. Степаненко, В.Т. Минченя, Н.Т. Минченя // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 2 (15). – С. 71-75.
10. Ланин, В.Л. Повышение качества микросварных соединений в интегральных схемах с использованием ультразвуковых систем повышенной частоты / В.Л. Ланин, И.Б. Петухов, Д. Мордвинцев // Технологии в электронной промышленности. – 2010. – № 1. – С. 48-50.