

С. С. Воронков

Псковский государственный университет

Россия, 180000, г. Псков, пл. Ленина, 2, e-mail: voronkovss@yandex.ru

О механизме генерации вихревых трубок в пограничном слое вязкого газа

Получена 05.11.2020, опубликована 06.12.2020

Рассматривается механизм генерации вихревых трубок в пограничном слое вязкого газа при возникновении турбулентности. Получено векторное волновое уравнение, описывающее механизм генерации вихревых трубок. Показано, что генерация вихревых трубок возможна только при определенных соотношениях между пульсационными составляющими скорости в набегающем потоке. Анализируется генерация вихревых трубок при различных сценариях перехода. Отмечается, что на различных этапах перехода для описания физических процессов необходимо использовать различные уравнения.

Ключевые слова: вихревые трубки, пограничный слой, вязкий газ, векторное волновое уравнение.

ВВЕДЕНИЕ

Существуют различные сценарии перехода в пограничном слое [1]. Естественный переход включает следующие этапы [1]:

1. Потеря устойчивости, появление волн Толлмина-Шлихтинга.
2. Появление двумерных вихрей.
3. Развал на трехмерные структуры.
4. Появление турбулентных пятен.
5. Полностью турбулентное течение.

Вынужденный (байпасный) переход [1] происходит при высокой степени турбулентности внешнего потока ($>0,5\%$) — рис. 1.

Сравнение естественного и вынужденного переходов показывает, что в обоих случаях формируются вихревые трубки. Но в естественном переходе двумерные вихри – вихревые трубки (рис. 2) расположены перпендикулярно направлению основного потока, в то время как при вынужденном переходе продольные вихри – вихревые трубки (рис. 1) расположены вдоль потока. Но в целом механизм перехода совпадает: формируются вихревые трубки, они распадаются и генерируют появление турбулентных пятен.

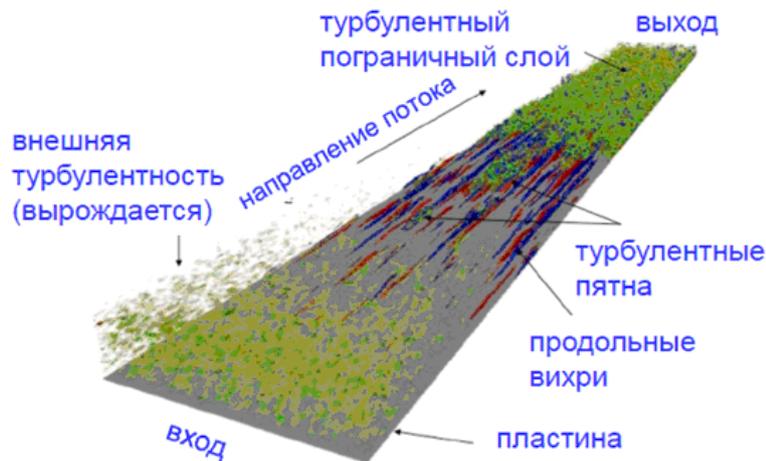


Рис. 1. Вынужденный переход. Рисунок из работы [1]

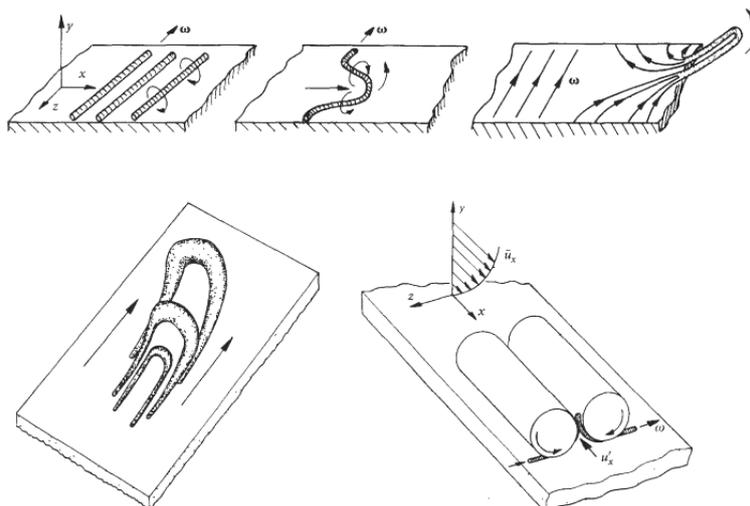


Рис. 2. Появление двумерных вихрей и их распад на трехмерные структуры в естественном переходе. Рисунок из работы [2]. Цитируется по [1]

При переходе к турбулентности в круглой струе также происходит образование вихревых трубок, но в форме кольцевого вихря с последующим образованием Λ – структур и их распадом [3] (рис. 3).

Возникает вопрос об универсальности механизма генерации вихревых трубок при возникновении турбулентности? Или он происходит случайным образом?

Покажем, что уравнение, описывающее механизм генерации вихревых трубок в пограничном слое вязкого газа при возникновении турбулентности, содержится в полной системе уравнений газовой динамики.

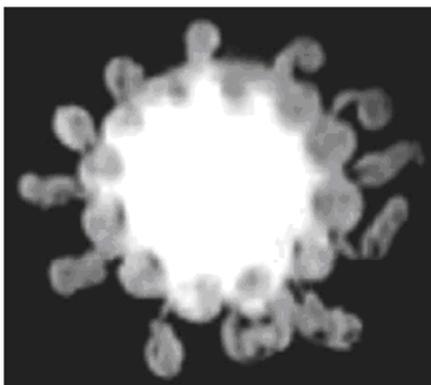


Рис. 3.

Визуализация поперечного сечения круглой струи в процессе взаимодействия кольцевого вихря с полосчатыми структурами и образованием при этом азимутальных Λ – структур. Рисунок из работы [3]

1. УРАВНЕНИЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ МЕХАНИЗМ ГЕНЕРАЦИИ ВИХРЕВЫХ ТРУБОК

Для вывода уравнения, описывающего механизм генерации вихревых трубок в пограничном слое вязкого газа, выпишем следующие уравнения:

1. Уравнение Навье-Стокса — закон сохранения количества движения, в предположении постоянства коэффициента динамической вязкости $\mu = const$ и при отсутствии гравитационных сил [4]

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{V} + \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\mu}{3\rho} \text{grad} \text{div} \mathbf{V}. \quad (1)$$

2. Уравнение для пульсаций давления — закон сохранения энергии, в предположении постоянства коэффициента теплопроводности $\lambda = const$ [5]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \text{grad} p - a_s^2 \frac{d\rho}{dt} = (k-1)\Phi, \quad (2)$$

где p, ρ — давление и плотность газа; a_s — адиабатное и изоэнтропное значение скорости звука; Φ — функция, учитывающая диссипацию энергии и теплообмен:

$$\Phi = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \left. \begin{aligned} & 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \\ & \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} (\text{div} \mathbf{V})^2 \right] \end{aligned} \right\};$$

T — температура газа; \mathbf{V} — вектор скорости газа с проекциями u, v, w на оси декартовой системы координат x, y, z соответственно; λ — коэффициент теплопроводности; μ — коэффициент динамической вязкости; t — время; k — показатель адиабаты.

3. Уравнение неразрывности — закон сохранения массы [6]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим распространение малых возмущений скорости, давления и плотности. Выполним следующие преобразования уравнений (1) и (2). Уравнение (1) продифференцируем по времени $\frac{\partial}{\partial t}$, уравнение (2) продифференцируем оператором набла $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$, предварительно подставив в него производную плотности из уравнения неразрывности (3). Подставляя полученное уравнение (2) в уравнение (1), пренебрегая величинами второго порядка малости, пренебрегая членами с вязкостью и теплопроводностью, ответственными за диссипацию энергии, после соответствующих преобразований, получим следующее векторное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\nu \operatorname{div} \mathbf{V}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (4)$$

где $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — коэффициент кинематической вязкости.

Действительно, рассмотрим случай, когда скорость имеет потенциал φ

$$\mathbf{V} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (5)$$

где φ — потенциал скорости.

Подставляя (5) в уравнение (4), учитывая, что [6]

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi, \quad (6)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа,

после преобразований получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (a_s^2 - \frac{4}{3}(k-1)\nu \nabla^2 \varphi) \nabla^2 \varphi. \quad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой волновое акустическое уравнение для потенциала скорости и отличается от классического волнового уравнения тем, что скорость звука здесь зависит от потенциала скорости

$$a^2 = a_s^2 - \frac{4}{3}(k-1)\nu \nabla^2 \varphi. \quad (8)$$

Но так как коэффициент кинематической вязкости является малой величиной (для воздуха $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$, показатель адиабаты $k = 1,4$), в большинстве случаев вторым членом в (8) можно пренебречь.

Положение меняется при движении вязкого теплопроводного газа в пограничном слое, где течение не является потенциальным и необходимо рассматривать волновое уравнение в виде (4).

Уравнение (4) представляет собой векторное уравнение. Запишем его в проекциях на оси декартовой системы координат x, y, z :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)v\text{div}\mathbf{V}) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right], \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)v\text{div}\mathbf{V}) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right], \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)v\text{div}\mathbf{V}) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]. \quad (11)$$

Система волновых уравнений (9-11) описывает генерацию вихревых трубок в пограничном слое вязкого газа, возникающих при определенных условиях. Покажем это.

Уравнение (9) про дифференцируем по y — $\frac{\partial}{\partial y}$, уравнение (10) про дифференцируем по x — $\frac{\partial}{\partial x}$. Пренебрегая величинами более высокого порядка малости, уравнения запишутся

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)v\text{div}\mathbf{V}) \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x \partial y} \right], \quad (12)$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)v\text{div}\mathbf{V}) \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x} \right]. \quad (13)$$

Учитывая, что [6]

$$\omega_z = \frac{1}{2}(\text{rot}\mathbf{V})_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (14)$$

где ω_z — круговая частота по оси z ;

вычитая из уравнения (13) уравнение (12), после преобразований получим

$$\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} = 0. \quad (15)$$

Решение дифференциального уравнения (15) запишется

$$\omega_z = C_1 t + C_2, \quad (16)$$

где C_1, C_2 — константы.

Полученное решение (16) свидетельствует о том, что при определенных условиях, когда возмущения пульсаций скорости u и v удовлетворяют уравнениям (12) и (13), в пограничном слое будет возникать устойчивая вихревая трубка — двумерный вихрь в

естественном переходе — рис. 2. Если одна из компонент пульсаций, например v , отсутствует, вихревая трубка образовываться не будет. Это подтверждается экспериментами работы [7]. В работе Качанова, Козлова, Левченко в результате проведенных экспериментов установлено следующее [7]: «Таким образом, устранение v -компоненты пульсаций в набегающем возмущении привело к исчезновению механизма преобразования возмущения в волну Толлмина-Шлихтинга, то есть в отсутствие поперечной компоненты пульсаций внешнего потока волна Т-Ш в пограничном слое не возбуждается».

Рассмотрим, при каких условиях будут возникать продольные вихри в вынужденном переходе — рис. 1.

Уравнение (10) продифференцируем по z — $\frac{\partial}{\partial z}$, уравнение (11) продифференцируем по y — $\frac{\partial}{\partial y}$. Пренебрегая величинами более высокого порядка малости, уравнения запишутся

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial z} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)v \operatorname{div} \mathbf{V}) \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial y} \right], \quad (17)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)v \operatorname{div} \mathbf{V}) \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial y} \right]. \quad (18)$$

Учитывая, что [6]

$$\omega_x = \frac{1}{2} (\operatorname{rot} \mathbf{V})_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (19)$$

где ω_x — круговая частота по оси x ;

вычитая из уравнения (18) уравнение (17), после преобразований получим

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = 0. \quad (20)$$

Решение дифференциального уравнения (20) запишется

$$\omega_x = C_1 t + C_2, \quad (21)$$

где C_1, C_2 — константы.

Полученное решение (21) свидетельствует о существующей возможности генерации продольных вихрей в вынужденном переходе при наличии соответствующих пульсаций в набегающем потоке.

2. УРАВНЕНИЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ ИЗМЕНЕНИЕ ВИХРЕВЫХ ТРУБОК

Приведенные волновые уравнения (9-11) описывают механизм генерации вихревых трубок в пограничном слое вязкого газа.

Дальнейшее состояние вихревых трубок, их устойчивость или разрушение, описываются волновым уравнением, выводимым из волнового уравнения (4).

Запишем волновое уравнение (4), учитывая, что [6]

$$\text{graddiv}\mathbf{V} = \nabla^2\mathbf{V} + \text{rotrot}\mathbf{V}, \quad (22)$$

в виде

$$\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)v\text{div}\mathbf{V}) \cdot [\nabla^2\mathbf{V} + \text{rotrot}\mathbf{V}] \quad (23)$$

Возьмем операцию ротор (rot) от левой и правой частей уравнения (23). Пренебрегая величинами более высокого порядка малости, в результате получим

$$\frac{\partial^2\text{rot}\mathbf{V}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)v\text{div}\mathbf{V}) \cdot [\nabla^2\text{rot}\mathbf{V} + \text{rotrotrot}\mathbf{V}] \quad (24)$$

Учитывая, что

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\text{rot}\mathbf{V}, \quad (25)$$

Из уравнения (24) получим

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)v\text{div}\mathbf{V}) \cdot [\nabla^2\boldsymbol{\omega} + \text{rotrot}\boldsymbol{\omega}] \quad (26)$$

Или уравнение (26) можно переписать

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)v\text{div}\mathbf{V})\text{graddiv}\boldsymbol{\omega}. \quad (27)$$

Векторное волновое уравнение (27) описывает дальнейшее состояние вихревых трубок, их устойчивость или разрушение.

3. ПУЛЬСАЦИИ ДАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПЯТЕН

Векторное волновое уравнение (27) описывает изменение вихревой трубки. При распаде вихревой трубки возникают пульсации давления, определяемые по формуле, полученной из закона возникновения турбулентности [8]

$$\Delta p = 4\mu(k-1)\frac{\omega_0^2 t_0^2}{t_0 - t}. \quad (28)$$

где ω_0 — круговая частота вихревой трубки до начала распада, t_0 — полное время распада вихревой трубки.

Полученное аналитическое выражение для пульсаций давления (28) объясняет катастрофический, взрывной механизм возникновения турбулентных пятен в пограничном слое и перехода в целом. Давление в определенных точках пограничного слоя, где произошел распад вихревой трубки, нарастает быстро, асимптотически, что порождает шипы и высокочастотные пульсации скорости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Получено векторное волновое уравнение, описывающее механизм генерации вихревых трубок в пограничном слое вязкого газа при различных сценариях перехода.
2. Показано, что генерация вихревых трубок возможна только при определенных соотношениях между пульсационными составляющими скорости в набегающем потоке.
3. На различных этапах перехода к турбулентности для описания физических процессов необходимо использовать различные уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарбарук А.В. Переход к турбулентности. Лекция 2. – С-П.: СПбГПУ, 2019. – 35 с. Режим доступа: https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/turb_models/Term8_Lec02_transition.pdf
2. Davidson, P. A. Turbulence: an introduction for scientists and engineers. Oxford, UK: Oxford University Press, 2004. – 680 p.
3. Бойко А.В., Горев В.Н., Козлов В.В. Переход к турбулентности в пограничных слоях: Успехи и перспективы. Вестник НГУ. Серия: Физика. 2006. Том 1, выпуск 2. С. 21-28.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть вторая. – М-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1948. – 612 с.
5. Воронков С. С. О скорости звука в потоке вязкого газа с поперечным сдвигом. Электронный журнал «Техническая акустика», – Режим доступа. – URL: <http://www.ejta.org>, 2004, 5.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
7. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. – Новосибирск: Наука, 1982. – 151 с.
8. Воронков С. С. О механизме возникновения турбулентных пятен Эммонса. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2020, 1.