

С. С. Воронков

*Псковский государственный университет*

*Россия, 180000, г. Псков, пл. Ленина, 2, e-mail: [voronkovss@yandex.ru](mailto:voronkovss@yandex.ru)*

## О возникновении и распаде когерентных вихревых структур в вязком газе

*Получена 20.12.2020, опубликована 23.01.2021*

Рассматривается механизм возникновения и распада когерентных вихревых структур в пограничном слое на пластине и в круглой осесимметричной струе вязкого газа. Отмечается, что когерентные вихревые структуры присутствуют не только на стадии перехода, но и в развитом турбулентном течении вязкого газа. Установлено, что турбулентность в вязком теплопроводном газе представляет собой циклически повторяющийся процесс возникновения и распада когерентных вихревых структур, описываемых векторным волновым уравнением. Распад вихревых структур сопровождается взрывным, асимптотическим ростом пульсации давления, запускающим новый цикл генерации турбулентности.

Ключевые слова: когерентные вихревые структуры, векторное волновое уравнение, пограничный слой, круглая струя, вязкий газ.

### ВВЕДЕНИЕ

Как показывает проведенный анализ, полученное в работе [1] векторное волновое уравнение для круговой частоты вихревой трубки в вязком теплопроводном газе описывает не только изменение и распад вихревой трубки, но и возникновение вихревой трубки, возникновение и распад когерентных вихревых структур. Покажем это.

### 1. КОГЕРЕНТНЫЕ ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛАСТИНЕ

Приведем векторное волновое уравнение для круговой частоты вихревой трубки в вязком теплопроводном газе, полученное в работе [1]

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\nu \operatorname{div} \mathbf{V}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — круговая частота;  $a_s$  — адиабатное и изоэнтропное значение скорости звука;  $\mathbf{V}$  — вектор пульсационной скорости газа с проекциями  $u$ ,  $v$ ,  $w$  на оси декартовой системы координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $k$  — показатель адиабаты;  $t$  — время.

Рассмотрим возникновение вихревых трубок в естественном переходе на пластине – рис. 1

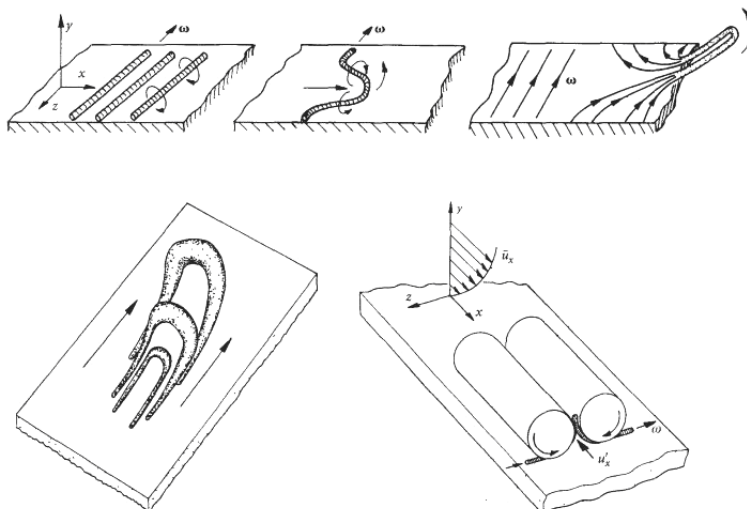


Рис. 1. Появление двумерных вихрей и их распад на трехмерные структуры в естественном переходе. Рисунок из работы [2]. Цитируется по [3]

Круговая частота связана с циркуляцией скорости:

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{V}. \tag{2}$$

Учитывая, что [4]

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0, \tag{3}$$

подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0. \tag{4}$$

Запишем векторное уравнение (4) в проекциях на оси декартовой системы координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} = 0. \tag{7}$$

Решения уравнений (5–7) запишутся:

$$\omega_x = C_1 t + C_2, \tag{8}$$

$$\omega_y = C_3 t + C_4, \tag{9}$$

$$\omega_z = C_5 t + C_6, \tag{10}$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  — константы.

В естественном переходе возникают вихревые трубки – двумерные вихри  $\omega_z$  – рис. 1, перпендикулярные основному направлению потока. Следовательно

$$C_1, C_2, C_3, C_4 = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим частный случай решения, когда начальное значение круговой частоты вихревой трубки не зависит от времени и  $C_5 = 0$ . Тогда начальное значение вихревой трубки будет определяться константой  $C_6$ , которая найдется как

$$C_6 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (12)$$

то есть начальное значение круговой частоты вихревой трубки определяется производными пульсационных составляющих скоростей  $u$  и  $v$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Дальнейшее изменение круговой частоты вихревой трубки  $\omega_z$  описывается векторным волновым уравнением (1). Запишем его в проекциях на оси декартовой системы координат  $x, y, z$ :

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\nu \operatorname{div} \mathbf{V}) \left[ \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z \partial x} \right], \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\nu \operatorname{div} \mathbf{V}) \left[ \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z \partial y} \right], \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\nu \operatorname{div} \mathbf{V}) \left[ \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right]. \quad (16)$$

Анализ уравнений (14-16) показывает, что возникшая в пограничном слое вихревая трубка с круговой частотой  $\omega_z$  будет порождать когерентные вихревые структуры с частотами  $\omega_x$  и  $\omega_y$  и сама будет деформироваться под действием этих вихревых структур. Действительно, в уравнениях (14) и (15) в правой части появились пространственные производные от частоты  $\omega_z$ , которые будут порождать вихревые трубки с частотами  $\omega_x$  и  $\omega_y$ . Также, согласно уравнению (16), первоначально двумерная вихревая трубка и ее круговая частота  $\omega_z$  будут деформироваться и изменяться, что отражено на рис. 1.

Реальная картина взаимодействия когерентных вихревых структур в пограничном слое является более сложной. Приведем результаты работы [5], в которой были количественно исследованы когерентные структуры турбулентного течения в открытом канале в пристеночной области – рис. 2.

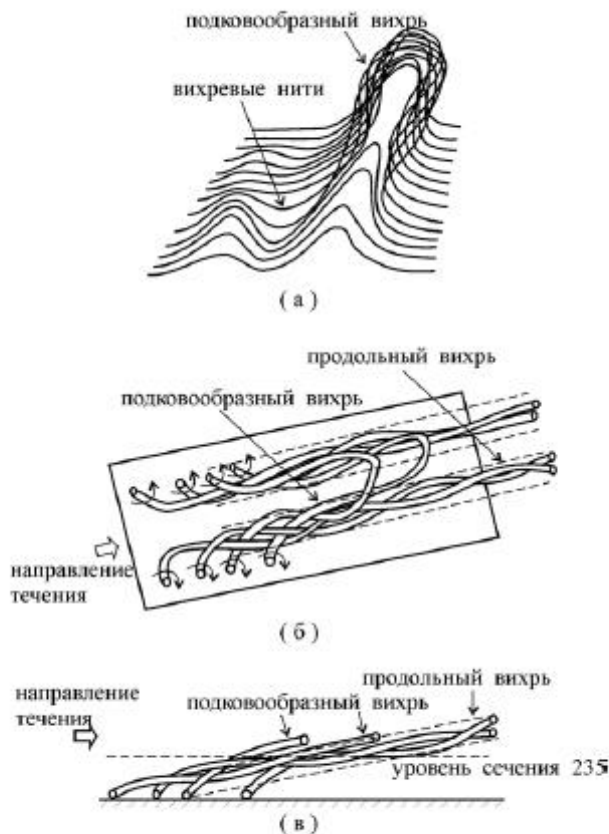


Рис. 2. Схематическая модель. (а) образование и развитие до стадии подковообразного вихря; (б) общий взгляд на структуру вблизи стенки на стадии полного развития; (в) вид сбоку. Рисунок из работы [5]. Цитируется по [6]

Вихревые трубки переплетаются сложным образом. Причем когерентные вихревые структуры присутствуют в пограничном слое не только на стадии перехода, но и в развитом турбулентном течении. Когерентные вихревые структуры распадаясь, генерируют турбулентные пятна. Генерация турбулентных пятен происходит под действием пульсации давления [7]

$$\Delta p = 4\mu(k-1) \frac{\omega_0^2 t_0^2}{t_0 - t}. \quad (17)$$

где  $\omega_0$  — круговая частота вихревой трубки до начала распада,  $t_0$  — полное время распада вихревой трубки,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости.

Возникает вопрос об универсальности механизма возникновения и распада когерентных вихревых структур в вязком газе?

## 2. КОГЕРЕНТЫЕ ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ В КРУГЛОЙ СТРУЕ

Рассмотрим возникновение и распад когерентных вихревых структур в круглой струе. При естественном переходе в круглой струе возникают кольцевые вихри — вихревые кольца Кельвина–Гельмгольца и полосчатые структуры, представляющие собой продольные вихри — рис. 3.

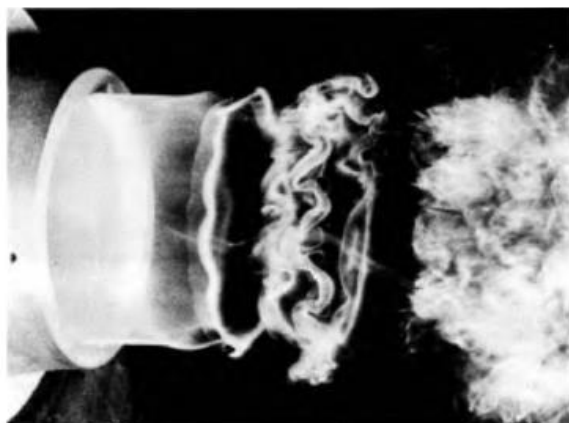


Рис. 3. Естественный переход в круглой струе. Рисунок из «Альбома течений жидкости и газа» М. Ван-Дайка. Фото R. Wille, A. Michalke. Цитируется по [3]

Полосчатые структуры, как отмечается в работе [8], возникают в струях непосредственно на выходе из плоских и круглых сопел.

Физические процессы для круглой осесимметричной струи удобнее рассматривать в цилиндрических координатах  $r, \varepsilon, z$ . Ось  $z$  совместим с осью струи. Запишем векторное уравнение (4) в проекциях на оси цилиндрической системы координат

$$\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial t^2} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \omega_\varepsilon}{\partial t^2} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} = 0. \quad (20)$$

Решения уравнений (5–7) запишутся

$$\omega_r = C_1 t + C_2, \quad (21)$$

$$\omega_\varepsilon = C_3 t + C_4, \quad (22)$$

$$\omega_z = C_5 t + C_6, \quad (23)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  — константы.

В естественном переходе круглой струи на срезе сопла возникают кольцевые вихри —  $\omega_\varepsilon$  и полосчатые структуры — продольные вихри —  $\omega_z$ . Следовательно

$$C_1, C_2 = 0. \quad (24)$$

Рассмотрим частный случай решений, когда начальные значения круговых частот вихревых трубок не зависят от времени и  $C_3, C_5 = 0$ . Тогда начальные значения вихревых трубок будут определяться константами  $C_4, C_6$ , которые найдутся как

$$C_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right), \quad (25)$$

$$C_\varepsilon = \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial(rV_\varepsilon)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} \right), \tag{26}$$

$V_r, V_\varepsilon, V_z$  — проекции пульсационных скоростей газа на оси цилиндрической системы координат  $r, \varepsilon, z$  соответственно,

то есть начальные значения круговых частот вихревых трубок определяются производными пульсационных составляющих скоростей

$$\omega_\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right), \tag{27}$$

$$\omega_z = \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial(rV_\varepsilon)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} \right). \tag{28}$$

Дальнейшее изменение круговых частот описывается векторным волновым уравнением (1). Запишем его в проекциях на оси цилиндрической системы координат  $r, \varepsilon, z$ :

$$\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)) \text{div} \mathbf{V} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\omega_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z \partial r} \right], \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 \omega_\varepsilon}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)) \text{div} \mathbf{V} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\omega_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z \partial \varepsilon} \right], \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)) \text{div} \mathbf{V} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\omega_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega_\varepsilon}{\partial \varepsilon \partial z} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right]. \tag{31}$$

Система волновых уравнений (29-31) описывает взаимодействие когерентных вихревых структур в круглой струе.

Как отмечается в работе [8]: «Важный аспект, касающийся полосчатых структур, это их роль в процессе турбулизации осесимметричных течений, например, в круглой струе. Такие структуры возникают в струях непосредственно на выходе из плоских и круглых сопел. При взаимодействии двумерных вихревых колец Кельвина–Гельмгольца с полосчатыми структурами происходит их трехмерное искажение с образованием характерных азимутальных  $\Lambda$  — или  $\Omega$  — образных выбросов (рис. 4)».



Рис. 4. Визуализация поперечного сечения круглой струи в процессе взаимодействия кольцевого вихря с полосчатыми структурами и образованием при этом азимутальных  $\Lambda$  — структур. Рисунок из работы [8]

Взаимодействие полосчатых структур с кольцевыми вихрями приводит к их распаду с образованием турбулентных пятен.

Когерентные вихревые структуры возникают как в ламинарных, так и в турбулентных струях.

В работе [9] исследован механизм возникновения и развития когерентных вихревых структур в ламинарной и турбулентной круглых струях. Авторы работы [9] пришли к следующим выводам: «Показано, что механизм возникновения и развития когерентных структур в ламинарной и турбулентной струях идентичен в общих чертах и связан с возникновением и развитием когерентных структур типа кольцевых вихрей Кельвина – Гельмгольца, полосчатых структур и их взаимодействием в обоих типах течения».

### 3. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ВЯЗКОМ ТЕПЛОПРОВОДНОМ ГАЗЕ

Когерентные вихревые структуры присутствуют не только на стадии перехода, но и в развитом турбулентном течении вязкого газа. Проведенное рассмотрение механизма возникновения и распада когерентных вихревых структур в пограничном слое на плоской пластине и в круглой осесимметричной струе позволяет дать следующее определение турбулентности в вязком теплопроводном газе: турбулентность в вязком теплопроводном газе представляет собой циклически повторяющийся процесс возникновения и распада когерентных вихревых структур, описываемых векторным

волновым уравнением  $\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\text{div}\mathbf{V})\text{graddiv}\boldsymbol{\omega}$ . Распад вихревых структур сопровождается взрывным, асимптотическим ростом пульсации давления

$\Delta p = 4\mu(k-1)\frac{\omega_0^2 t_0^2}{t_0 - t}$ , запуская новый цикл генерации турбулентности.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Показано, что полученное векторное волновое уравнение для круговой частоты вихревой трубки описывает возникновение и распад когерентных вихревых структур в пограничном слое на пластине и в круглой осесимметричной струе.
2. Отмечается, что когерентные вихревые структуры присутствуют не только на стадии перехода, но и в развитом турбулентном течении вязкого газа.
3. Установлено, что турбулентность в вязком теплопроводном газе представляет собой циклически повторяющийся процесс возникновения и распада когерентных вихревых структур, описываемых векторным волновым уравнением

$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\text{div}\mathbf{V})\text{graddiv}\boldsymbol{\omega}$ . Распад вихревых структур сопровождается

взрывным, асимптотическим ростом пульсации давления  $\Delta p = 4\mu(k-1)\frac{\omega_0^2 t_0^2}{t_0 - t}$ ,

запускающим новый цикл генерации турбулентности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Воронков С. С. О механизме генерации вихревых трубок в пограничном слое вязкого газа. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2020, 2.
2. Davidson, P. A. Turbulence: an introduction for scientists and engineers. Oxford, UK: Oxford University Press, 2004. – 680 p.
3. Гарбарук А. В. Переход к турбулентности. Лекция 2. – С-П.: СПбГПУ, 2019. – 35 с. Режим доступа: [https://cfд.spbstu.ru/agarbaruk/turb\\_models/Term8\\_Lec02\\_transition.pdf](https://cfд.spbstu.ru/agarbaruk/turb_models/Term8_Lec02_transition.pdf)
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
5. Tadashi Utami, Tetsuo Ueno. Experimental study on the coherent structure of turbulent open-channel flow using visualization and picture processing // J. Fluid Mech. 1987. V. 174. P. 399-440.
6. Хлопков Ю. И., Жаров В. А., Горелов С. Л. Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое. – М.: МФТИ, 2002. 267 с.
7. Воронков С. С. О механизме возникновения турбулентных пятен Эммонса. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2020, 1.
8. Бойко А. В., Горев В. Н., Козлов В. В. Переход к турбулентности в пограничных слоях: Успехи и перспективы. Вестник НГУ. Серия: Физика. 2006. Том 1, выпуск 2. С. 21-28.
9. Козлов Г. В., Литвиненко Ю. А., Грек Г. Р., Сорокин А. М. О механизме возникновения и развития когерентных структур в ламинарной и турбулентной круглых струях. Вестник НГУ. Серия: Физика. 2008. Том 3, выпуск 1. С. 12-22.