

С. С. Воронков

Псковский государственный университет

Россия, 180000, г. Псков, пл. Ленина, 2, e-mail: [voronkovss@yandex.ru](mailto:voronkovss@yandex.ru)

## О турбулентности в вязком газе

Получена 14.04.2021, опубликована 18.05.2021

Приводятся уравнения, описывающие турбулентность. Дается определение турбулентности в вязком теплопроводном газе. Рассматривается существование и гладкость решений уравнений Навье-Стокса. Отмечается, что с точки зрения физики при рассмотрении существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса в вязком теплопроводном газе необходимо учитывать сжимаемость среды. Показано, что разрывное поведение давления в турбулентном потоке вязкого теплопроводного газа следует не из решений уравнений Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды, а из решений более общей системы уравнений, учитывающей сжимаемость и диссипацию энергии: уравнений Навье-Стокса, сохранения энергии, неразрывности и состояния.

Ключевые слова: турбулентность, вязкий теплопроводный газ, закон возникновения турбулентности, уравнение Навье-Стокса.

### ВВЕДЕНИЕ

Традиционно считается, что турбулентность в жидкостях и газах описывается системой уравнений Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды [1]

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (1)$$

$$\nabla \mathbf{V} = \text{div} \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{V}$  — вектор скорости с проекциями  $u$ ,  $v$ ,  $w$  на оси декартовой системы координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно;  $\mathbf{F}$  — гравитационные силы;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;

$\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $t$  — время;  $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$  —

оператор набла;  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа.

Уравнение (1) представляет собой уравнение Навье-Стокса. Уравнение (2) выражает условие несжимаемости среды.

При решении системы уравнений (1-2) необходимо задавать начальные и граничные условия.

Допущение о несжимаемости среды существенно упрощает математическую постановку задачи. Система уравнений (1-2) — это система из четырех уравнений (первое

векторное уравнение представляет собой три скалярных) с четырьмя неизвестными –  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и  $p$ . Допущение о несжимаемости среды является приемлемым для жидкостей. Газы в первом приближении при умеренных скоростях также рассматривают как несжимаемые. Это следует из того, что изменение плотности в газах зависит от числа Маха ( $M = u / a$ ) [1]:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{1}{2} M^2 + \dots \tag{3}$$

Оценки показывают [1], что если допустить относительную ошибку за счет не учета сжимаемости газа, равную 1%, то это приводит к ограничению скорости для воздуха  $u < 50$  м/с.

Но эти оценки относятся к установившемуся движению газов, и они необоснованно экстраполируются на область возникновения турбулентности. Как показано в работе [2], на передней кромке пластины – рис. 1, при возникновении турбулентности происходит резкий скачок термодинамических параметров: давления, плотности, и температуры, а также дивергенции скорости.

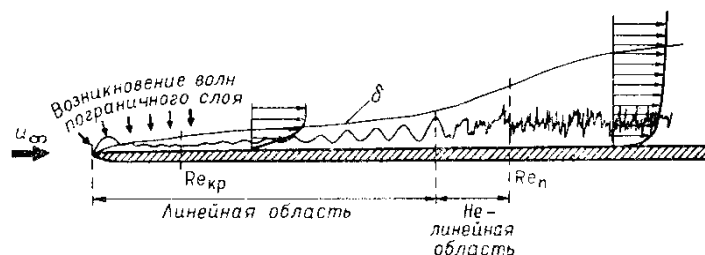


Рис. 1. Схема основных стадий процесса перехода в пограничном слое. Рисунок из работы [3]

На рис. 2 приведены графики изменения давления и плотности вдоль пластины [2]. Передняя кромка пластины располагается в узле  $i = 6$ .

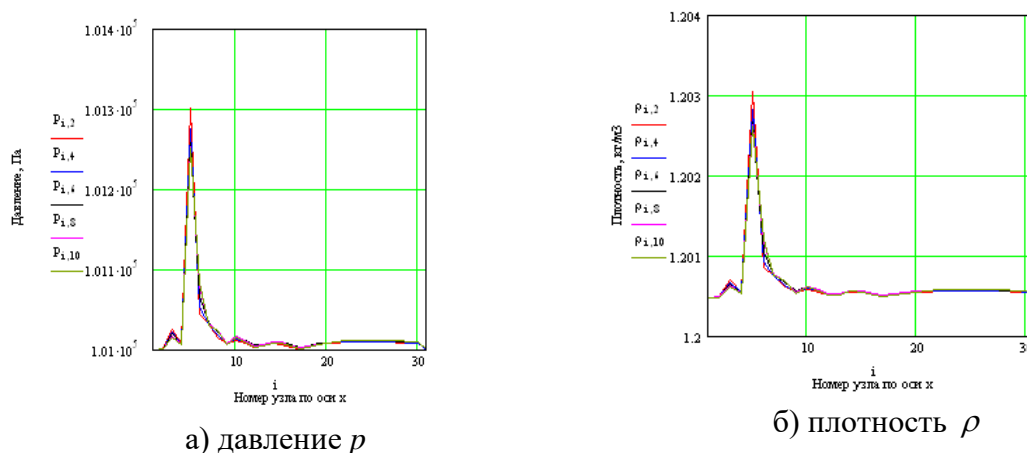


Рис. 2. Изменение давления и плотности воздуха в пограничном слое вдоль пластины в момент времени  $n=20$ . Рисунок из работы [2]

На рис. 3 приведен график изменения дивергенции скорости вдоль пластины. На передней кромке пластины происходит резкий скачок этой величины с отрицательным знаком.

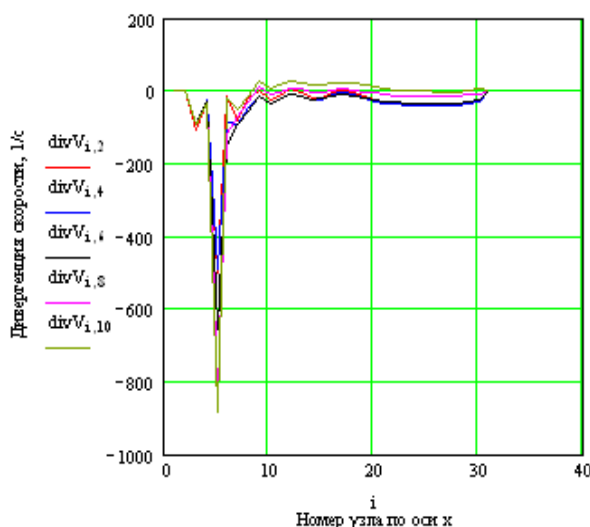


Рис. 3. Изменение дивергенции скорости  $\operatorname{div} \mathbf{V}$  воздуха в пограничном слое вдоль пластины в момент времени  $n=20$ . Рисунок из работы [2]

Полученные результаты ставят под сомнение правомерность допущения о несжимаемости среды при анализе возникновения турбулентности в вязком теплопроводном газе, которое предполагает, что

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (4)$$

На передней кромке пластины дивергенция скорости принимает значение порядка  $\operatorname{div} \mathbf{V} = -800$  (смотри рис. 3).

Как показано в работе [4], при анализе возникновения турбулентности в пограничном слое вязкого теплопроводного газа необходимо учитывать сжимаемость среды и диссипацию энергии в потоке.

Возникает вопрос о необходимости учета сжимаемости среды при рассмотрении существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса в вязком теплопроводном газе.

## 1. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ВЯЗКОМ ТЕПЛОПРОВОДНОМ ГАЗЕ

Выпишем систему уравнений, описывающих турбулентность в вязком теплопроводном газе:

1. Уравнение Навье-Стокса — закон сохранения количества движения, в предположении постоянства коэффициента динамической вязкости  $\mu = \text{const}$  и при отсутствии гравитационных сил [5]

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{V} + \operatorname{grad} \left( \frac{V^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\mu}{3\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}. \quad (5)$$

2. Уравнение для пульсаций давления — закон сохранения энергии, в предположении постоянства коэффициента теплопроводности  $\lambda = const$  [6]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \text{grad} p - a_s^2 \frac{d\rho}{dt} = (k-1)\Phi, \quad (6)$$

где  $p, \rho$  — давление и плотность газа;  $a_s$  — адиабатное и изоэнтропное значение скорости звука;  $\Phi$  — функция, учитывающая диссипацию энергии и теплообмен:

$$\Phi = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \\ + \mu \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} (\text{div} \mathbf{V})^2 \right\};$$

$T$  — температура газа;  $\mathbf{V}$  — вектор скорости газа с проекциями  $u, v, w$  на оси декартовой системы координат  $x, y, z$  соответственно;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости;  $t$  — время;  $k$  — показатель адиабаты.

3. Уравнение неразрывности — закон сохранения массы [1]

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \mathbf{V} = 0. \quad (7)$$

4. Уравнение состояния для совершенного газа

$$p = \rho RT, \quad (8)$$

где  $R$  — газовая постоянная.

В этой системе из 6-ти уравнений (первое векторное уравнение представляет собой три скалярных) неизвестных 6 величин:  $u, v, w, p, \rho, T$ .

Важную роль в понимании механизма возникновения и поддержания турбулентности в вязком теплопроводном газе играет, помимо уравнения Навье-Стокса (5), являющегося нелинейным, уравнение для пульсаций давления (6), полученное в работе [6]. Уравнение для пульсаций давления (6) также является нелинейным. Эта нелинейность проявляется при возникновении турбулентности.

Традиционно считается, что сжимаемость газов достаточно точно описывается линейным приближением, согласно которому изменение давления связано с относительной объемной деформацией законом Гука [7]

$$dp = -E \frac{dV}{V} = -E \frac{dv}{v} = E \frac{d\rho}{\rho}, \quad (9)$$

где  $p$  — давление,  $E$  — модуль объемной упругости газа,  $V, v, \rho$  — объем, удельный объем, плотность газа соответственно.

Модуль объемной упругости  $E$  представляет собой коэффициент пропорциональности.

Помимо модуля упругости газа, для характеристики сжимаемости используют также коэффициент сжимаемости и скорость звука, которые следующим образом связаны между собой [7]

$$\beta = \frac{1}{E}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (10)$$

где:  $\beta$  — коэффициент сжимаемости,  $a$  — скорость звука,  $\rho$  — плотность.

Линейная зависимость между изменением давления и изменением объема справедлива при постоянстве модуля упругости газа. Модуль упругости покоящихся газов зависит от их давления, и при постоянстве этого параметра является постоянной величиной. Поэтому для покоящихся газов линейный закон Гука достаточно точно описывает связь между изменением давления и изменением объема.

Но для движущегося потока вязкого теплопроводного газа с поперечным сдвигом эта линейная зависимость между изменением давления и изменением объема нарушается, так как модуль упругости зависит от процессов, происходящих в этой среде (скорости потока, частоты и интенсивности возмущения, градиентов скорости и температуры и др.).

Учитывая формулу для скорости звука, полученную в [6]

$$a^2 = a_s^2 + \frac{\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad} \rho - \text{grad} p) + (k-1)\Phi}{\frac{\partial \rho}{\partial t}}, \quad (11)$$

найдем модуль объемной упругости

$$E = \rho a^2 = \rho a_s^2 + \frac{\rho [\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad} \rho - \text{grad} p) + (k-1)\Phi]}{\frac{\partial \rho}{\partial t}}. \quad (12)$$

Анализ выражения (12) показывает, что модуль объемной упругости можно представить в виде

$$E = E_s + \Delta E, \quad (13)$$

где:  $E_s = \rho a_s^2$  — адиабатный модуль объемной упругости,

$$\Delta E = \frac{\rho [\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad} \rho - \text{grad} p) + (k-1)\Phi]}{\frac{\partial \rho}{\partial t}} \text{ — амплитуда модуля объемной упругости —}$$

нелинейная добавка, обусловленная диссипацией энергии и теплообменом в потоке вязкого теплопроводного газа с поперечным сдвигом.

Приведем на рисунке 4 характерный закон изменения модуля объемной упругости в фиксированный момент времени ( $n=59$ ) вдоль канала вблизи стенки ( $j=3$ ) при наличии гармонического возмущения плотности [8]

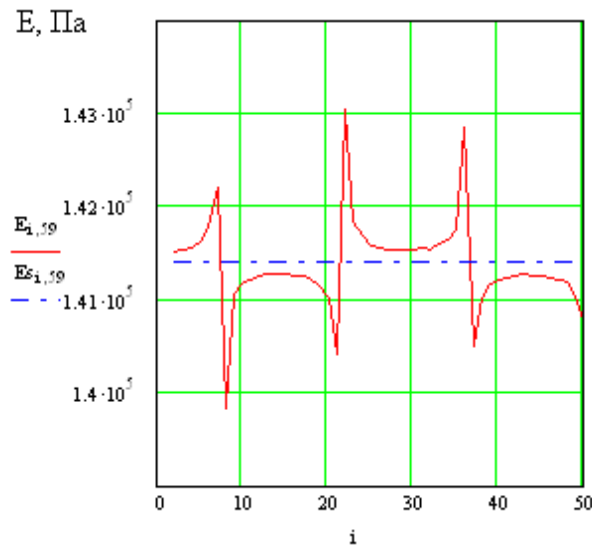


Рис. 4.  $E_{i,59}$  — модуль объемной упругости с учетом диссипации энергии и теплообмена, Па;  $E_{s,i,59}$  — адиабатный модуль объемной упругости, Па;  $i$  — номер узла конечно-разностной сетки по оси  $x$ . Рисунок из работы [8]

Подставляя выражение для модуля объемной упругости (12) в формулу (9), получим закон возникновения турбулентности в вязком теплопроводном газе, найденный в работе [4]

$$dp = dps + dpn = a_s^2 d\rho + (\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad} \rho - \text{grad} p) + (k - 1)\Phi) dt, \tag{14}$$

где  $dps = a_s^2 d\rho$  — линейная составляющая изменения давления;  $dpn = (\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad} \rho - \text{grad} p) + (k - 1)\Phi) dt$  — нелинейная составляющая изменения давления;  $a_s$  — адиабатное и изоэнтропное значение скорости звука;  $p, \rho$  — давление и плотность газа;  $\Phi$  — функция, учитывающая диссипацию энергии и теплообмен.

Этот закон следует непосредственно из уравнения для пульсаций давления (6) и используется для описания турбулентности в вязком теплопроводном газе. Он демонстрирует необходимость учета сжимаемости среды при рассмотрении турбулентности в вязком газе.

## 2. ЧТО ТАКОЕ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ?

Важную роль в понимании турбулентности в вязком теплопроводном газе играют когерентные вихревые структуры, первоначально возникающие на передней кромке пластины (рисунок 5).

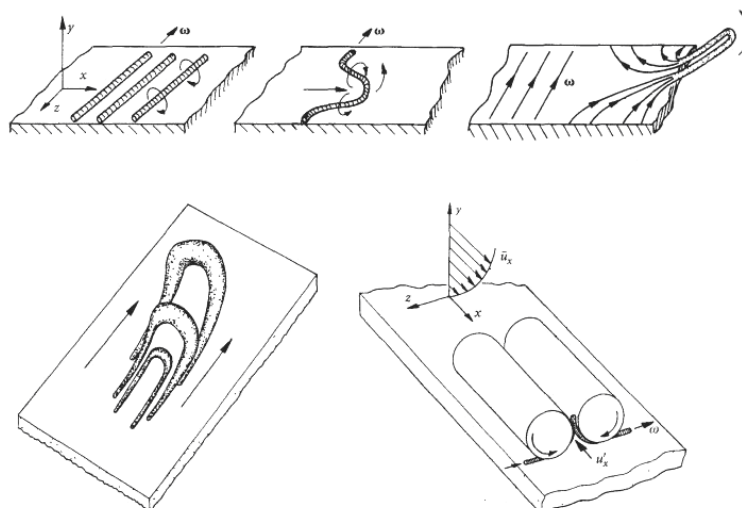


Рис. 5. Появление двумерных вихрей и их распад на трехмерные структуры в естественном переходе. Рисунок из работы [9]. Цитируется по [10]

Приведем формулу для пульсации давления (15), под действием которого происходит генерация вихревых трубок на передней кромке пластины. Формула получена из закона возникновения турбулентности (14) при гармоническом возмущении в [11]. Приведем также векторное волновое уравнение (16), описывающее связь волн Толлмина-Шлихтинга с акустическими волнами [2], векторное волновое уравнение для круговых частот когерентных вихревых структур (17), описывающее их возникновение и распад [12], формулу для пульсаций давления (18), генерирующих образование турбулентных пятен Эммонса [13]

$$\Delta p = \mu(k-1) \left[ \left( \frac{u_\infty}{\delta} \right)^2 \Delta t + \frac{u_\infty u'_m}{\delta^2} \frac{2}{\omega} \sin \omega t \right], \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\nu) \text{grad div } \mathbf{V}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\nu) \text{grad div } \boldsymbol{\omega}, \tag{17}$$

$$\Delta p = 4\mu(k-1) \frac{\omega_0^2 t_0^2}{t_0 - t}, \tag{18}$$

где  $u_\infty$  — скорость набегающего потока;  $u'_m$  — амплитуда пульсационной составляющей скорости;  $\omega$  — круговая частота возмущения;  $\Delta t$  — интервал интегрирования по времени;  $\delta$  — толщина пограничного слоя;  $t$  — время;  $a_s$  — адиабатное и изоэнтропное значение скорости звука;  $\mathbf{V}$  — вектор пульсационной скорости газа с проекциями  $u$ ,  $v$ ,  $w$  на оси декартовой системы координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $k$  — показатель адиабаты;  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор круговой частоты вихревой трубки;  $\omega_0$  — круговая частота вихревой трубки до начала распада,  $t_0$  — полное время распада вихревой трубки,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости.

Когерентные вихревые структуры присутствуют в пограничном слое не только на стадии перехода, но и в развитом турбулентном течении [14]. Когерентные вихревые структуры распадаясь, генерируют образование турбулентных пятен. Генерация турбулентных пятен происходит под действием пульсации давления (18).

Приведем на рисунке 6 мгновенные снимки вихревых структур в пограничном слое, полученные прямым численным моделированием перехода к турбулентности при решении уравнений Навье-Стокса с учетом сжимаемости среды [15]

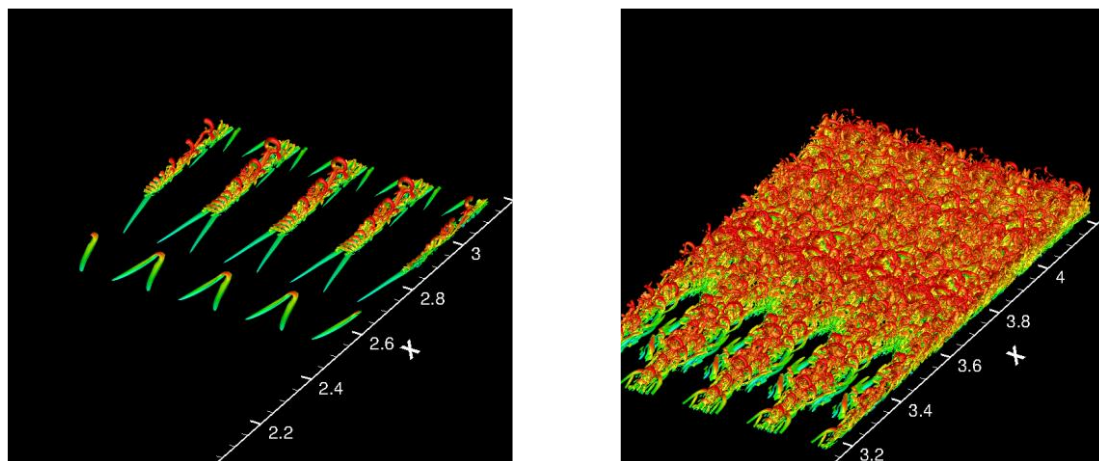


Рис.6. Мгновенные снимки вихревых структур внутри пограничного слоя. Рисунок из работы [15]

Проведенное рассмотрение позволяет дать следующее определение турбулентности в вязком теплопроводном газе [14]:

*Турбулентность в вязком теплопроводном газе представляет собой циклически повторяющийся процесс возникновения и распада когерентных вихревых структур,*

*описываемых векторным волновым уравнением  $\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\nu \operatorname{div} \mathbf{V}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}$ .*

*Распад вихревых структур сопровождается взрывным, асимптотическим ростом*

*пульсации давления  $\Delta p = 4\mu(k-1)\frac{\omega_0^2 t_0^2}{t_0 - t}$ , запускающим новый цикл генерации*

*турбулентности.*

### 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Задача существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса [16] сформулирована Математическим институтом Клэя [17] как одна из семи математических задач тысячелетия. Уравнения Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды являются нелинейными и их аналитические решения на сегодня найдены только для узкого круга задач [18, 19]. Поэтому считается, что доказательство существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса позволит глубже понять



свойства уравнений и разобраться в проблеме турбулентности, которая остается одной из важнейших нерешенных проблем в физике [20].

В постановке задачи о существовании и гладкости решений уравнений Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды требуется доказать одно из двух утверждений [16], что решения уравнений Навье-Стокса, вектор скорости  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  и поле давления  $p(\vec{x}, t)$ , существуют и они гладкие или же, что решения  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  и  $p(\vec{x}, t)$  не существуют или они негладкие.

Но как показано в этой статье, турбулентность, по крайней мере, в вязком теплопроводном газе, связана со сжимаемостью среды.

Поэтому задача существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды представляет интерес лишь с точки зрения математики и лишена физического содержания.

С точки зрения физики при рассмотрении существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса в вязком теплопроводном газе необходимо учитывать сжимаемость среды.

Полученное выражение для пульсации давления [13], выпишем его еще раз:

$$\Delta p = 4\mu(k-1) \frac{\omega_0^2 t_0^2}{t_0 - t}, \quad (19)$$

свидетельствует о том, что давление в турбулентном потоке вязкого теплопроводного газа в зонах распада когерентных вихревых структур асимптотически возрастает и претерпевает разрыв.

Приведем график изменения пульсации давления в зонах распада когерентных вихревых структур – рис. 7.

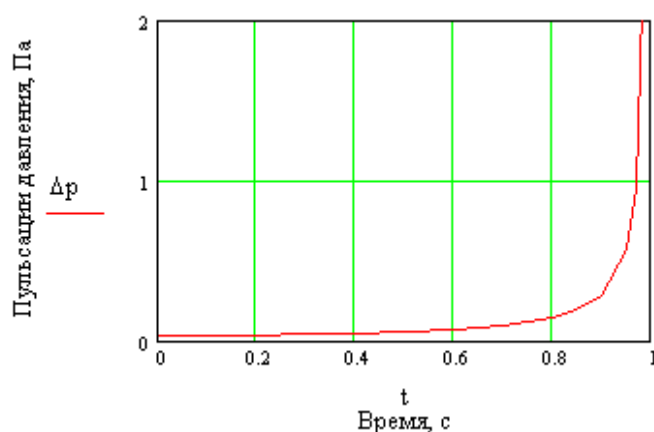


Рис. 7. Пульсации давления, вычисленные по формуле (19). При расчете принималось:  $\mu = 1,82 \cdot 10^{-5}$  Па · с ;  $k = 1,4$  ;  $\omega_0 = 10\pi$  рад/с ;  $t_0 = 1$  с . Рисунок из работы [13]

Полученное аналитическое выражение для пульсаций давления (19) объясняет катастрофический, взрывной механизм возникновения турбулентных пятен Эммонса в пограничном слое и перехода в целом. Давление в определенных точках пограничного

слоя, где произошел распад когерентных вихревых структур, нарастает быстро, асимптотически, что порождает шипы и высокочастотные пульсации скорости.

Но такое разрывное поведение давления в турбулентном потоке вязкого теплопроводного газа следует не из решений уравнений Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды, а из решений более общей системы уравнений (5-8), учитывающей сжимаемость и диссипацию энергии: уравнений Навье-Стокса, сохранения энергии, неразрывности и состояния.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Дается определение турбулентности: *Турбулентность в вязком теплопроводном газе представляет собой циклически повторяющийся процесс возникновения и распада когерентных вихревых структур, описываемых векторным волновым уравнением*
$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\text{div}\mathbf{V})\text{grad}\text{div}\boldsymbol{\omega}.$$
*Распад вихревых структур сопровождается взрывным, асимптотическим ростом пульсации давления*
$$\Delta p = 4\mu(k-1)\frac{\omega_0^2 t_0^2}{t_0 - t},$$
*запускающим новый цикл генерации турбулентности.*
2. Закон возникновения турбулентности в вязком теплопроводном газе играет важную роль в понимании турбулентности. Он демонстрирует необходимость учета сжимаемости среды при рассмотрении турбулентности в вязком газе.
3. Отмечается, что с точки зрения физики при рассмотрении существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса в вязком теплопроводном газе необходимо учитывать сжимаемость среды.
4. Показано, что разрывное поведение давления в турбулентном потоке вязкого теплопроводного газа следует не из решений уравнений Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды, а из решений более общей системы уравнений (5-8), учитывающей сжимаемость и диссипацию энергии: уравнений Навье-Стокса, сохранения энергии, неразрывности и состояния.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
2. Воронков С.С. О связи волн Толлмина-Шлихтинга с акустическими волнами. Научный Журнал "Noise Theory and Practice" Том 6, № 4 (IV, 2020). С.42-48. Режим доступа: <http://www.noisetp.com/ru/issues/>
3. Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. – Новосибирск: Наука, 1982. – 151 с.
4. Воронков С.С. О законе возникновения турбулентности в вязком теплопроводном газе. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2016, 6.
5. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть вторая. – М-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1948. – 612 с.
6. Воронков С.С. О скорости звука в потоке вязкого газа с поперечным сдвигом. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2004, 5.
7. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. – М.: Наука, 1964. – 814 с.

8. Воронков С.С. О модуле упругости вязкого теплопроводного газа. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2010, 4.
9. Davidson P.A. Turbulence: an introduction for scientists and engineers. Oxford, UK: Oxford University Press, 2004. – 680 p.
10. Гарбарук А.В. Переход к турбулентности. Лекция 2. – С-П.: СПбГПУ, 2019. – 35 с. Режим доступа:  
[https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/turb\\_models/Term8\\_Lec02\\_transition.pdf](https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/turb_models/Term8_Lec02_transition.pdf)
11. Воронков С.С. О генерации волн Толлмина-Шлихтинга в пограничном слое вязкого теплопроводного газа. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2018, 5.
12. Воронков С.С. О механизме генерации вихревых трубок в пограничном слое вязкого газа. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2020, 2.
13. Воронков С.С. О механизме возникновения турбулентных пятен Эммонса. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2020, 1.
14. Воронков С.С. О возникновении и распаде когерентных вихревых структур в вязком газе. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2021, 1.
15. Sayadi T., Hamman C.W., Moin P. Direct numerical simulation of H-type and K-type transition to turbulence. Center for Turbulence Research. Annual Research Briefs. 2011, p. 109-121. [https://web.stanford.edu/group/ctr/ResBriefs/2011/10\\_sayadi-color.pdf](https://web.stanford.edu/group/ctr/ResBriefs/2011/10_sayadi-color.pdf)
16. Существование и гладкость решений уравнений Навье-Стокса. – Википедия. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Существование\\_и\\_гладкость\\_решений\\_уравнений\\_Навьё\\_—\\_Стокса](https://ru.wikipedia.org/wiki/Существование_и_гладкость_решений_уравнений_Навьё_—_Стокса)
17. The Clay Mathematics Institute. <https://claymath.org/>
18. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – 2-е изд. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
19. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
20. Нерешенные проблемы современной физики. – Википедия. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Нерешённые\\_проблемы\\_современной\\_физики](https://ru.wikipedia.org/wiki/Нерешённые_проблемы_современной_физики)