Электронный журнал «Техническая акустика»
http://www.ejta.org
2021, 4

С. С. Воронков

Псковский государственный университет
Россия, 180000, г. Псков, пл. Ленина, 2, e-mail: voronkovss@yandex.ru

О турбулентности в жидкости

Получена 31.08.2021, опубликована 08.10.2021

Анализируется турбулентность в жидкостях и газах. Приводятся уравнения, описывающие турбулентность в газе Ван-дер-Ваальса. Отмечается, что при рассмотрении турбулентности в жидкостях, так же как и в газах, необходимо учитывать сжимаемость среды. Дается определение турбулентности в жидкостях и газах. Рассматривается существование и гладкость решений уравнений Навье-Стокса. Показано, что разрывное поведение давления в турбулентном потоке жидкости и газа следует не из решений уравнений Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды, а из решений более общей системы уравнений, учитывающей сжимаемость и диссипацию энергии.

Ключевые слова: турбулентность, газ Ван-дер-Ваальса, векторное волновое уравнение, уравнение Навье-Стокса.

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно считается, что возникновение турбулентности и явление турбулентности в целом в жидкостях и газах описывается системой уравнений Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды [1].

Но как показано в работе [2], при рассмотрении турбулентности в вязком теплопроводном газе необходимо учитывать сжимаемость среды и для описания физических процессов привлекать полную систему уравнений: уравнения Навье-Стокса, сохранения энергии, неразрывности и состояния. В [2] показано, что турбулентность в вязком теплопроводном газе представляет собой циклически повторяющийся процесс возникновения и распада когерентных вихревых структур, описываемых векторным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\nu \operatorname{div}\boldsymbol{V})\operatorname{graddiv}\boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор круговой частоты вихревой трубки; t — время; a_s — адиабатное значение скорости звука совершенного газа; $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости газа с проекциями u, v, w на оси декартовой системы координат x, y, z соответственно; ν — коэффициент кинематической вязкости; k — показатель адиабаты.

Распад вихревых структур сопровождается взрывным, асимптотическим ростом пульсации давления

$$\Delta p = 4(k-1)\mu \frac{\omega_0^2 t_0^2}{t_0 - t}, \qquad (2)$$

где p — давление; μ — коэффициент динамической вязкости; k — показатель адиабаты; ω_0 — круговая частота вихревой трубки до начала распада, t_0 — полное время распада вихревой трубки; t — время.

Взрывной характер роста пульсации давления порождает высокочастотные пульсации скорости и запускает новый цикл генерации турбулентности.

С точки зрения физики процесса возникновение турбулентности и явление турбулентности в жидкостях ничем не отличается от турбулентности в газах. Обычно, результаты, полученные для жидкостей, например, опыты Рейнольдса по переходу к турбулентности потока воды в трубе, экстраполируются на переход в газовой среде при совпадении числа Рейнольдса.

В качестве примера приведем результаты экспериментов по визуализации турбулентных пятен Эммонса для газа и жидкости в пограничном слое на пластине.

а) в воздухе; визуализация осуществляется при помощи дыма в воздухе, освещаемого вспышкой; фото R. E. Falco; рисунок из работы [3]

б) в воде; визуализация при помощи суспензии алюминиевых хлопьев в воде; рисунок из работы [4]; цитируется по [3]

Рис. 1. Турбулентное пятно Эммонса. Число Рейнольдса *Re*=200000

Сравнение рисунков показывает, что турбулентные пятна, как в газе, так и в жидкости сохраняют характерную стреловидную форму и в целом идентичны.

Но раз рассмотрение турбулентности в вязком теплопроводном газе требует учета сжимаемости среды, то возникает вопрос о необходимости учета сжимаемости среды при рассмотрении турбулентности в жидкости.

1. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ГАЗЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Особенность жидкости по сравнению с газами заключается в том, что для жидкости нет точного уравнения состояния и полная система уравнений, включающая уравнения Навье-Стокса, энергии и неразрывности не является замкнутой.

Для начала рассмотрим турбулентность в газе Ван-дер-Ваальса, который занимает промежуточное положение между совершенным газом и жидкостью. Уравнение Ван-дер-Ваальса учитывает реальные свойства газа: наличие межмолекулярного взаимодействия в газе и собственный объем молекул. Оно качественно описывает переход в жидкое состояние и критические явления. Если удастся показать, что в газе Ван-дер-Ваальса полученные уравнения для совершенного газа (1) и (2) сохраняют свое значение, то это позволит экстраполировать их и на жидкости для описания турбулентности.

Выпишем систему уравнений, описывающих турбулентность в газе Ван-дер-Ваальса:

1. Уравнение Навье-Стокса — закон сохранения количества движения, в предположении постоянства коэффициента динамической вязкости $\mu = const$ и при отсутствии гравитационных сил [5]

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} + \mathrm{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\boldsymbol{V} + \frac{\mu}{3\rho}\mathrm{graddiv}\boldsymbol{V}. \quad (3)$$

2. Уравнение состояния для газа Ван-дер-Ваальса [6]

$$(p + \frac{a}{\upsilon^2})(\upsilon - b) = RT, \quad (4)$$

где υ — удельный объем газа; T — температура газа; R — газовая постоянная; a и b — константы газа Ван-дер-Ваальса, характеризующие индивидуальные свойства вещества; константа b характеризует объем, занимаемый молекулами; величина a/υ^2 учитывает взаимодействие молекул газа и представляет собой внутреннее давление.

3. Уравнение для пульсаций давления — закон сохранения энергии, в предположении постоянства коэффициента теплопроводности $\lambda = const$, полученное для газа Ван-дер-Ваальса в работе [7]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{grad}p - a_{sb}^2 \frac{d\rho}{dt} = (k-1)\Phi \frac{\upsilon}{\upsilon - b}, \quad (5)$$

где p, ρ — давление и плотность газа; $a_{sb}^2 = kRT \dfrac{\upsilon^2}{(\upsilon - b)^2} - \dfrac{2a}{\upsilon}$ — квадрат адиабатного значения скорости звука для газа Ван-дер-Ваальса; Φ — функция, учитывающая диссипацию энергии и теплообмен:

$$\Phi = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) +$$
$$+ \mu \left\{ \begin{aligned} &2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}(\mathrm{div}\boldsymbol{V})^2 \end{aligned} \right\};$$

T — температура газа; $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости газа с проекциями u, v, w на оси декартовой системы координат x, y, z соответственно; λ — коэффициент теплопроводности; μ — коэффициент динамической вязкости; t — время; k — показатель адиабаты.

4. Уравнение неразрывности — закон сохранения массы [1]

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\mathrm{div}\boldsymbol{V}=0. \tag{6}$$

В этой системе из 6-ти уравнений (первое векторное уравнение представляет собой три скалярных) неизвестных 6 величин: u, v, w, p, ρ, T.

Для получения векторного волнового уравнения, описывающего когерентные вихревые структуры в газе Ван-дер-Ваальса, проделаем выкладки, аналогичные для получения уравнения в совершенном газе [8]. В результате получим

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}=(a_{sb}^2+\frac{4}{3}(k-1)\frac{\upsilon}{\upsilon-b}\nu\mathrm{div}\boldsymbol{V})\mathrm{graddiv}\boldsymbol{\omega}. \tag{7}$$

Формула для пульсаций давления (2), генерирующих образование турбулентных пятен Эммонса в газе Ван-дер-Ваальса, после преобразований запишется

$$\varDelta p=4(k-1)\frac{\upsilon}{\upsilon-b}\mu\frac{\omega_0^2t_0^2}{t_0-t}. \tag{8}$$

Анализ полученных уравнений (7) и (8) в сравнении с уравнениями (1) и (2) для совершенного газа показывает, что учет реальности газа приводит к усилению нелинейных эффектов в уравнениях (7) и (8), так как член $\upsilon/(\upsilon-b)$ всегда больше единицы.

2. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ЖИДКОСТИ

В качестве уравнения состояния для жидкостей используется эмпирическое уравнение состояния Тэта [9]

$$p=p_*((\frac{\rho}{\rho_0})^{k_*}-1), \tag{9}$$

где p_* и k_* — эмпирические константы; p_* — внутреннее давление, для воды $\approx 3{,}2\cdot 10^8$ Па ; k_* — аналог показателя адиабаты, для воды ≈ 7.

Учитывая уравнение состояния (9), адиабатный модуль объемной упругости E_s найдется

$$E_s=\rho_0\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{s,\rho=\rho_0}=k_*p_*. \tag{10}$$

Адиабатное значение скорости звука для жидкости определится

$$a_{sg}=\sqrt{\frac{E_s}{\rho_0}}=\sqrt{\frac{k_*p_*}{\rho_0}}. \tag{11}$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса качественно описывает переход в жидкое состояние и критические явления. Поэтому полученные уравнения (7) и (8) справедливы и для жидкостей с необходимостью количественной корректировки констант, входящих в эти уравнения. Запишем эти уравнения в следующем общем виде

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = (a_{si}^2 + C_1 \nu \,\mathrm{div}\mathbf{V})\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\boldsymbol{\omega}, \tag{12}$$

$$\Delta p = C_2 \mu \frac{\omega_0^2 t_0^2}{t_0 - t}, \tag{13}$$

где a_{si} — адиабатное значение скорости звука для совершенного газа, газа Ван-дер-Ваальса, жидкости; C_1 и C_2 — константы, имеющие различные значения для совершенного газа, газа Ван-дер-Ваальса и жидкости.

Сведем значения этих констант в таблицу.

№ п/п	Среда	a_{si}	C_1	C_2
1.	Совершенный газ	a_s	$\frac{4}{3}(k-1)$	$4(k-1)$
2.	Газ Ван-дер-Ваальса	a_{sb}	$\frac{4}{3}(k-1)\frac{\upsilon}{\upsilon-b}$	$4(k-1)\frac{\upsilon}{\upsilon-b}$
3.	Жидкость	a_{sg}	$\frac{4}{3}(k_*-1)\frac{\upsilon}{\upsilon-b}$ первое приближение, требует экспериментального уточнения	$4(k_*-1)\frac{\upsilon}{\upsilon-b}$ первое приближение, требует экспериментального уточнения

Приведем график изменения пульсации давления в зонах распада когерентных вихревых структур в жидкости, рассчитанный по формуле (13) – рис. 2.

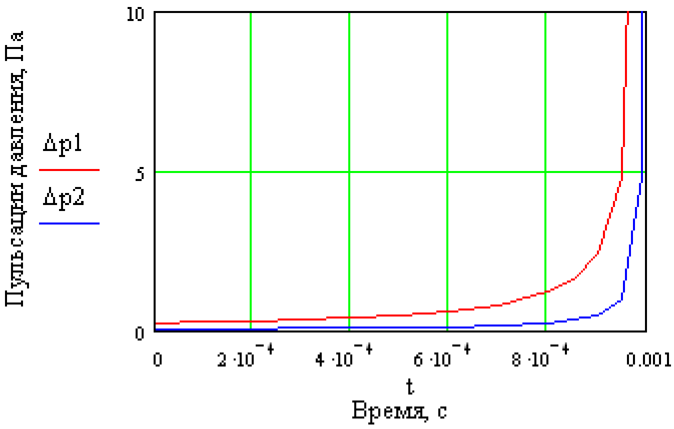

Рис. 2. Пульсации давления в воде, вычисленные по формуле (13). $\Delta p1$ — вода t=20°С; $\Delta p2$ — вода t=100°С. При расчете принималось: $\omega_0 = 10\pi$ рад/с; $t_0 = 0{,}001$ с; $b = 0{,}0009$ м^3/кг; $k_* = 7$; для воды при t=20°С $\mu = 1003 \cdot 10^{-6}$ Па·с; при t=100°С $\mu = 282 \cdot 10^{-6}$ Па·с

Проведенное рассмотрение позволяет дать следующее определение турбулентности в жидкостях и газах:

Турбулентность в жидкостях и газах представляет собой циклически повторяющийся процесс возникновения и распада когерентных вихревых структур, описываемых векторным волновым уравнением $\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = (a_{si}^2 + C_1 \nu \mathrm{div}\boldsymbol{V})\mathrm{graddiv}\boldsymbol{\omega}$. *Распад вихревых структур сопровождается взрывным, асимптотическим ростом пульсации давления* $\Delta p = C_2 \mu \frac{\omega_0^2 t_0^2}{t_0 - t}$, *запускающим новый цикл генерации турбулентности.*

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Задача существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса [10] сформулирована Математическим институтом Клэя [11] как одна из семи математических задач тысячелетия. Уравнения Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды являются нелинейными и их аналитические решения на сегодня найдены только для узкого круга задач [12, 13]. Поэтому считается, что доказательство существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса позволит глубже понять свойства уравнений и разобраться в проблеме турбулентности, которая остается одной из важнейших нерешенных проблем в физике [14].

В постановке задачи о существовании и гладкости решений уравнений Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды требуется доказать одно из двух утверждений [10], что решения уравнений Навье-Стокса, вектор скорости $\vec{\upsilon}(\vec{x},t)$ и поле давления $p(\vec{x},t)$, существуют и они гладкие или же, что решения $\vec{\upsilon}(\vec{x},t)$ и $p(\vec{x},t)$ не существуют или они негладкие.

Но как показано в этой статье, турбулентность в жидкостях и газах связана со сжимаемостью среды.

Поэтому задача существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды представляет интерес лишь с точки зрения математики и лишена физического содержания.

С точки зрения физики при рассмотрении существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса в жидкостях и газах необходимо учитывать сжимаемость среды.

Полученное выражение для пульсации давления (13) свидетельствует о том, что давление в турбулентном потоке жидкости и газа в зонах распада когерентных вихревых структур асимптотически возрастает и претерпевает разрыв.

Но такое разрывное поведение давления в турбулентном потоке жидкости и газа следует не из решений уравнений Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды, а из решений более общей системы уравнений, учитывающей сжимаемость и диссипацию энергии: уравнений Навье-Стокса, сохранения энергии, неразрывности и состояния.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Дается определение турбулентности: *Турбулентность в жидкостях и газах представляет собой циклически повторяющийся процесс возникновения и распада когерентных вихревых структур, описываемых векторным волновым уравнением* $\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = (a_{si}^2 + C_1 \nu \operatorname{div} \boldsymbol{V}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}$. *Распад вихревых структур сопровождается взрывным, асимптотическим ростом пульсации давления* $\Delta p = C_2 \mu \frac{\omega_0^2 t_0^2}{t_0 - t}$, *запускающим новый цикл генерации турбулентности.*
2. Отмечается, что с точки зрения физики при рассмотрении существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса в жидкостях и газах необходимо учитывать сжимаемость среды.
3. Показано, что разрывное поведение давления в турбулентном потоке жидкости и газа следует не из решений уравнений Навье-Стокса в приближении несжимаемости среды, а из решений более общей системы уравнений, учитывающей сжимаемость и диссипацию энергии: уравнений Навье-Стокса, сохранения энергии, неразрывности и состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
2. Воронков С.С. О турбулентности в вязком газе. Электронный журнал «Техническая акустика», http://www.ejta.org, 2021, 3.
3. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986. – 184 с.
4. Cantwell B., Coles D., Dimotakis P. – J. Fluid Mech., 1978, 87, p. 641-672.
5. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть вторая. – М-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1948. – 612 с.
6. Вукалович М.П. и Новиков И.И. Техническая термодинамика. – М.: Энергия, 1968. – 496 с.
7. Воронков С.С. Обобщение формулы для скорости звука в вязком совершенном газе на газ Ван-дер-Ваальса. Вестник Псковского государственного университета. Серия: Технические науки. 2015. № 1. С. 111-115.
8. Воронков С.С. О механизме генерации вихревых трубок в пограничном слое вязкого газа. Электронный журнал «Техническая акустика», http://www.ejta.org, 2020, 2.
9. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 400 с.
10. Существование и гладкость решений уравнений Навье-Стокса. – Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Существование_и_гладкость_решений_уравнений_Навье_—_Стокса
11. The Clay Mathematics Institute. https://claymath.org/
12. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – 2-е изд. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
13. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
14. Нерешенные проблемы современной физики. – Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Нерешённые_проблемы_современной_физики