

С. С. Воронков

Псковский государственный университет

Россия, 180000, г. Псков, пл. Ленина, 2, e-mail: voronkovss@yandex.ru

О механизме распада вихревых трубок в пограничном слое

Получена 06.12.2021, опубликована 02.02.2022

Рассмотрены различные механизмы распада вихревых трубок в пограничном слое вязкого газа. Получена уточненная формула пульсации давления, возникающего при распаде вихревых трубок. Показано, что при естественном переходе при распаде вихревой трубки с заостренной головкой происходит более плавный, постепенный рост давления. Приводятся уравнения, описывающие полный цикл турбулентности в вязком газе, включающий различные этапы.

Ключевые слова: вихревая трубка, пограничный слой, вязкий газ, цикл турбулентности.

ВВЕДЕНИЕ

Как показано в работе [1], турбулентность представляет собой циклически повторяющийся процесс возникновения и распада когерентных вихревых структур. Распад вихревых структур сопровождается взрывным, асимптотическим ростом пульсации давления, запускающим новый цикл генерации турбулентности. Когерентные вихревые структуры представляют собой взаимосвязанные вихревые трубки, первоначально возникающие на передней кромке пластины — рис. 1.

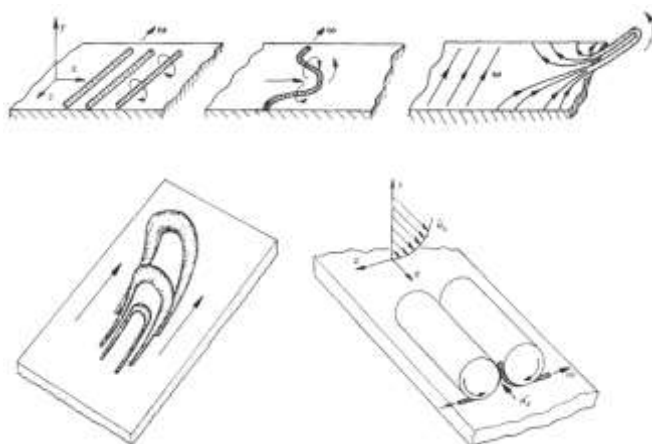


Рис. 1.

Появление двумерных вихрей и их распад на трехмерные структуры.

Рисунок из работы [2].

Цитируется по [3]

Механизм возникновения вихревых трубок рассмотрен в работе [4]. Рассмотрим более подробно механизм распада вихревых трубок в пограничном слое.

1. УТОЧНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ПУЛЬСАЦИИ ДАВЛЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ РАСПАДЕ ВИХРЕВЫХ ТРУБОК

Согласно «каскадной» схеме описания турбулентных потоков [5], крупные вихри распадаются на все более мелкие, и диссипация кинетической энергии в тепло происходит на мелких вихрях с малым масштабом.

Действительно, покажем, что диссипация энергии происходит на последней стадии распада вихревых трубок.

Приведем полученный в работе [6] закон возникновения турбулентности в виде

$$dp = dps + dpn = a_s^2 d\rho + (\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad} \rho - \text{grad} p) + (k-1)\lambda \text{div grad} T + (k-1)\Phi) dt, \quad (1)$$

где $dps = a_s^2 d\rho$ — линейная составляющая изменения давления; $dpn = (\mathbf{V} \cdot (a_s^2 \text{grad} \rho - \text{grad} p) + (k-1)\lambda \text{div grad} T + (k-1)\Phi) dt$ — нелинейная составляющая изменения давления; a_s — адиабатное и изоэнтропное значение скорости звука; p, ρ — давление и плотность газа; Φ — функция, учитывающая диссипацию энергии [5]: $\Phi = 2\mu \dot{S}^2 - \frac{2}{3} \mu (\text{div} \mathbf{V})^2$; \dot{S} — тензор скоростей деформаций; T — температура газа; \mathbf{V} — вектор скорости газа; λ — коэффициент теплопроводности; μ — коэффициент динамической вязкости; t — время; k — показатель адиабаты.

Введем для вихревой трубки цилиндрические координаты r, ε, z . Ось z совместим с осью вихревой трубки. Тогда скорости газа для вихревой трубки определятся

$$V_\varepsilon = \omega r, V_r = 0, V_z = 0, \quad (2)$$

где ω — круговая частота вращения вихревой трубки.

Выпишем выражения для тензора скоростей деформаций в цилиндрических координатах [5]

$$\dot{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r} - \frac{V_\varepsilon}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r} - \frac{V_\varepsilon}{r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Рассмотрим изменение давления, обусловленное нелинейным членом в законе (1). При этом допустим, что:

- разностью конвективных производных плотности и давления, как величинами второго порядка малости, можно пренебречь;
- температурные поля еще не сформировались и ими можно пренебречь.

В результате из (1), с учетом (3) получим

$$dp = \mu(k-1) \left\{ \begin{aligned} &2 \left[\left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{V_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r} - \frac{V_\varepsilon}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \\ &\left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} dt. \quad (4)$$

Анализ приведенного выражения для давления (4) показывает, при значениях скоростей для вихревой трубки (2) давление в вихревой трубке не изменяется, так как диссипация энергии отсутствует. Положение меняется при распаде вихревой трубки.

Из первой теоремы Гельмгольца о вихрях вытекает, что [5]

$$\omega\sigma = \omega_0\sigma_0 = \text{const}, \quad (5)$$

где σ — площадь сечения вихревой трубки.

Распад вихревой трубки в каком-либо сечении приведет к резкому уменьшению площади сечения вихревой трубки в этом сечении. Примем в качестве первого приближения закон уменьшения площади сечения вихревой трубки в месте распада линейным:

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right), \quad t < t_0, \quad (6)$$

σ_0 — начальная площадь вихревой трубки в сечении распада, t_0 — время полного распада вихревой трубки.

Найдем выражение для угловой скорости вращения вихревой трубки ω из (5) и (6):

$$\omega = \frac{\omega_0\sigma_0}{\sigma} = \frac{\omega_0\sigma_0}{\sigma_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)} = \frac{\omega_0}{1 - \frac{t}{t_0}}. \quad (7)$$

В сечении распада вихревой трубки при резком уменьшении площади сечения будет возникать радиальная скорость V_r . Выпишем выражение для субстанциональной производной радиальной скорости [5]:

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varepsilon^2}{r}. \quad (8)$$

Принимая для оценки скорости V_r в качестве промежутка времени dt время полного распада вихревой трубки t_0 , получим

$$V_r = -\frac{V_\varepsilon^2 t_0}{r} = -\omega^2 r t_0. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (4), получим

$$dp = \mu(k-1) \frac{4}{3} \omega^4 t_0^2 dt. \quad (10)$$

Подставляя (7) в (10), после интегрирования для пульсации давления в сечении распада вихревой трубки получим

$$\Delta p = \mu \frac{4(k-1)}{9} \frac{\omega_0^4 t_0^6}{(t_0 - t)^3} = \mu \frac{4(k-1)}{9} \frac{\omega_0^4 t_0^3}{(1-\tau)^3}, \quad (11)$$

где $\tau = \frac{t}{t_0}$ — безразмерное время.

Полученное уточненное выражение (11) характеризует взрывной, асимптотический рост пульсации давления в сечении распада вихревой трубки.

В некоторых работах [7, 8] оспаривается катастрофический характер разрушения ламинарного режима. Так в работе [8] делается следующий вывод: «Ввиду больших скоростей нарастания вторичной неустойчивости, господствующее до сих пор утверждение о том, что разрушение носит катастрофический характер, не является необоснованным. Однако в свете настоящих экспериментов мы должны констатировать, что разрушение является не катастрофическим, а постепенным, таким же постепенным, как неустойчивости струй и следов».

Рассмотрим, что влияет на скорость разрушения ламинарного режима течения при вторичной неустойчивости.

2. РАСПАД ВИХРЕВЫХ ТРУБОК НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН ТОЛЛМИНА-ШЛИХТИНГА

Рассмотрим распад вихревых трубок на теле вращения при вынужденном возбуждении волн Толлмина-Шлихтинга — рис. 2.



Рис. 2. Визуализация процесса образования Λ -образных вихрей с закругленной головкой на теле вращения. Рисунок из работы [9]. Цитируется по работе [7]

Трехмерное искажение плоской волны Толлмина-Шлихтинга приводит к образованию системы Λ -образных вихрей с закругленной головкой [7] — рис. 2. «По мере распространения вниз по потоку, как отмечается в [7], головка всплывает по направлению к внешней границе пограничного слоя и, попадая в область более высоких скоростей, отрывается от боковых вихрей, разрушается и образует турбулентное пятно. Каждый из Λ -образных вихрей разрушается индивидуально». В сечении отрыва головки происходит резкий скачок давления, определяемый по формуле (11). Это возмущение давления распространяется внутри вихревой трубки,

внутри Λ -образного вихря, разрушая его, что и придает пятну Эммонса характерную стреловидную форму — рис. 3.

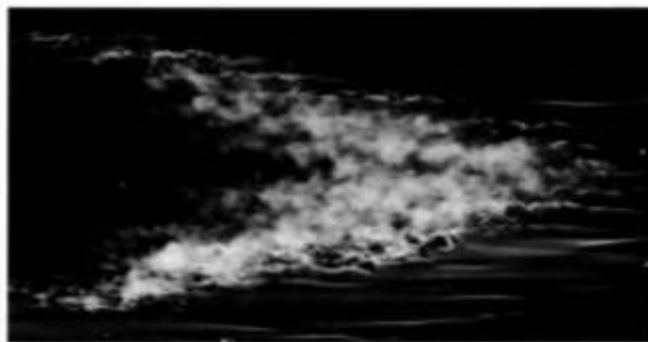


Рис. 3. Турбулентное пятно Эммонса. Число Рейнольдса $Re = 400000$. Визуализация осуществляется при помощи дыма в воздухе, освещаемого вспышкой. Фото R.E. Falco. Рисунок из работы [10]

Найдем уравнение, описывающее распространение возмущения давления внутри вихревой трубки.

Рассмотрим распространение малых возмущений скорости, давления и плотности. Выполним следующие преобразования уравнений Навье-Стокса и уравнения сохранения энергии [4]. Уравнение Навье-Стокса продифференцируем оператором набла $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$, уравнение сохранения энергии продифференцируем по времени $\frac{\partial}{\partial t}$, предварительно подставив в него производную плотности из уравнения неразрывности [4]. Подставляя полученное уравнение Навье-Стокса в уравнение сохранения энергии, пренебрегая величинами второго порядка малости, пренебрегая членами с вязкостью и теплопроводностью, ответственными за диссипацию энергии, после соответствующих преобразований, получим следующее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)\nu \operatorname{div} \mathbf{V}) \operatorname{div} \operatorname{grad} p, \quad (12)$$

где $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — коэффициент кинематической вязкости.

Полученное волновое уравнение (12) описывает распространение возмущения давления внутри вихревой трубки, окончательно разрушающее вихревую трубку.

3. РАСПАД ВИХРЕВЫХ ТРУБОК НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ ПЕРЕХОДЕ

Рассмотрим распад вихревых трубок при естественном переходе на теле вращения — рис. 4.



Рис. 4. Визуализация процесса образования групп Λ -образных вихрей с заостренной головкой на теле вращения. Рисунок из работы [9]. Цитируется по работе [7]

В [7] отмечается: « Λ -образные вихри имели заостренные головки, и их разрушение происходило не индивидуально с отрывом головок, а всех сразу». Как установлено в работах Линь Цзя-цзяо, Фроста, Битте и др. [11,12], вихревые трубки подвержены растяжению с уменьшением площади сечения вихря.

Растяжение вихревых трубок, по всей видимости, является кинематическим эффектом. Как следует из первой теоремы Гельмгольца о вихрях, вихревые трубки могут быть замкнутыми или заканчиваться на стенках или границах жидкости — рис. 5.

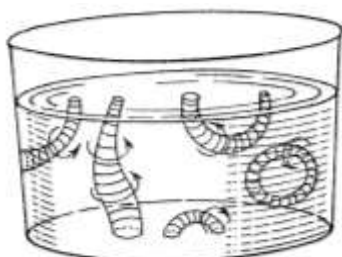


Рис. 5.

Вихревые трубки не могут заканчиваться внутри жидкости; они либо образуют замкнутые кольца, либо опираются на стенки сосуда или свободные поверхности. Рисунок из работы [5]

На стенках канала в силу условия прилипания скорость потока равна нулю, в пограничном слое скорость потока резко увеличивается. Часть вихревой трубки, находящаяся в пограничном слое, будет подвержена деформации и растяжению. Уравнение, описывающее деформацию вихревых трубок скоростным полем, получено Фридманом [5]:

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \dot{S} - \omega \operatorname{div} V. \quad (13)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (13) выражает эффект деформации вектора ω скоростным полем. Второе слагаемое в правой части уравнения (13) определяет влияние сжимаемости на деформацию, искажение вихревой трубки.

Как видно из рис. 4, растяжение вихря, его распад, начинается сразу после возникновения вихревой трубки. Поэтому время t_0 , характеризующее время полного распада вихревой трубки для этих вихрей, будет значительно больше, чем для вихрей с

закругленной головкой — рис. 2. Это и обуславливает более плавный, постепенный рост пульсации давления в естественном переходе при распаде вихревой трубки.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ПУЛЬСАЦИИ ДАВЛЕНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ МЕХАНИЗМАХ РАСПАДА ВИХРЕВЫХ ТРУБОК

Оценим частотные характеристики турбулентного пограничного слоя. Частотные (спектральные) характеристики турбулентного пограничного слоя показывают, как отмечается в [5], что внутри слоя преимущественное значение имеют колебания частоты, низкой по сравнению с частотами колебаний вне пограничного слоя. Так, в пограничном слое на пластине в сечении, соответствующем числу Рейнольдса $Re_x=650000$, преимущественное значение имеют частоты до 40–50 Гц, при $Re_x=1600000$ — до 20 Гц, а вне пограничного слоя — порядка 100 Гц. Доля высоких частот (порядка 1000 Гц) совершенно невелика». Примем в качестве круговой частоты вихревой трубки $\omega_0 = 100\pi$ рад/с, соответствующей частоте 50 Гц.

Время жизни вихря составляет [13]

$$\Delta t \sim T, \quad (14)$$

где T — период вихря, определяемый равенством $T = 2\pi/\omega$, ω — круговая частота вихревой трубки.

Как отмечается в [13]: «Соотношение (14) является весьма специфическим предположением о динамике вихрей в турбулентной среде. Согласно этому предположению, время жизни вихря сравнимо по величине с периодом его вращения. Еще более условно можно считать, что Δt является постоянной времени, характеризующей эволюцию вихря, так что, согласно (14), любой вихрь полностью исчезает через несколько оборотов. Это предположение, вообще говоря, во многом подтверждается теорией турбулентности». Примем в качестве времени полного распада вихревой трубки в случае растяжения вихревой трубки с заостренной головкой — рис. 4

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (15)$$

Время, характеризующее время полного распада вихревой трубки t_0 для вихрей с закругленной головкой — рис. 2, примем на порядок меньше.

Приведем график изменения пульсации давления в пограничном слое вязкого газа при распаде вихревых трубок — рис. 6, построенного по формуле (11).

Сравнение двух графиков роста пульсации давления — рис. 6 показывает, что при естественном переходе при распаде вихревой трубки с заостренной головкой происходит более плавный, постепенный рост давления.

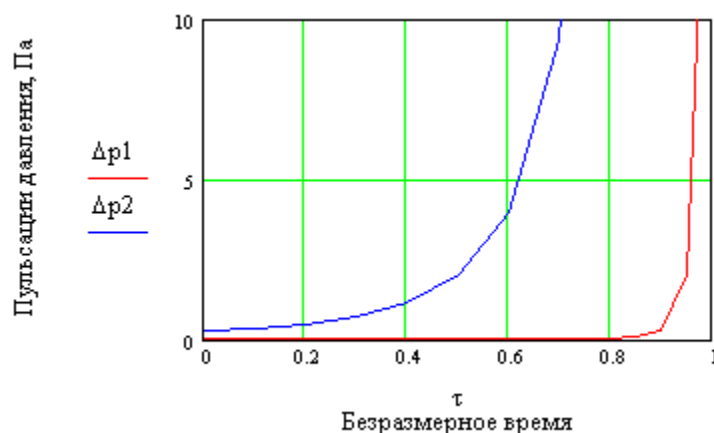


Рис. 6. Пульсации давления в пограничном слое вязкого газа, вычисленные по формуле (11). При расчете принималось: $\mu = 1,82 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $k = 1,4$; $\omega_0 = 100\pi \text{ рад/с}$; $\Delta p1$: $t_0 = 0,002 \text{ с}$ — пульсация давления при распаде вихревой трубки с отрывом головки; $\Delta p2$: $t_0 = 0,02 \text{ с}$ — пульсация давления при распаде вихревой трубки с заостренной головкой

5. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПОЛНЫЙ ЦИКЛ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Турбулентность представляет собой циклически повторяющийся процесс возникновения и распада вихревых трубок. Распад вихревых трубок сопровождается взрывным, асимптотическим ростом пульсации давления, запускающим новый цикл генерации турбулентности.

Приведем уравнения, описывающие полный цикл турбулентности в вязком газе, включающий следующие этапы:

1. Усиление низкочастотных возмущений.
2. Возникновение волн Толлмина-Шлихтинга.
3. Возникновение вихревых трубок.
4. Деформация и растяжение вихревых трубок.
5. Распад вихревых трубок, сопровождающийся взрывным, асимптотическим ростом пульсации давления.
6. Распространение возмущений давления по вихревым трубкам с образованием турбулентных пятен Эммонса.
7. Пульсации скорости различных частот и интенсивностей, подготавливающие условия для нового цикла генерации турбулентности.

№ этапа	Уравнения
1.	$\Delta p = 2(k - 1)\mu \frac{u_\infty u'_m}{\omega \delta^2} \sin \omega t.$
2.	$\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k - 1)) \text{div } \mathbf{V} \text{ grad div } \mathbf{V}.$
3.	$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} = 0.$

4.	$\frac{d\omega}{dt} = \omega \dot{S} - \omega \operatorname{div} \mathbf{V} - \text{уравнение Фридмана.}$
5.	$\Delta p = \frac{4(k-1)}{9} \mu \frac{\omega_0^4 t_0^3}{(1-\tau)^3}.$
6.	$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = (a_s^2 + \frac{4}{3}(k-1)v \operatorname{div} \mathbf{V}) \operatorname{div} \operatorname{grad} p.$
7.	$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{V} - \text{уравнение Навье-Стокса.}$

Некоторые из приведенных этапов в тех или иных условиях могут отсутствовать. Этап 2 возникновения волн Толлмина-Шлихтинга происходит, как правило, на передней кромке пластины при низкой начальной турбулентности и в развитом турбулентном потоке отсутствует. Этап 6, при равномерном растяжении вихревой трубки по всей длине, также может отсутствовать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Получена уточненная формула пульсации давления, возникающего при распаде вихревых трубок.
2. Рассмотрены различные механизмы распада вихревых трубок в пограничном слое. Показано, что при естественном переходе при распаде вихревой трубки с заостренной головкой происходит более плавный, постепенный рост давления.
3. Приведены уравнения, описывающие полный цикл турбулентности в вязком газе, включающий различные этапы. Некоторые из приведенных этапов в тех или иных условиях могут отсутствовать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронков С. С. О турбулентности в вязком газе. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2021, 3.
2. Davidson, P. A. Turbulence: an introduction for scientists and engineers. Oxford, UK: Oxford University Press, 2004. – 680 p.
3. Гарбарук А. В. Переход к турбулентности. Лекция 2. – С-П.: СПбГПУ, 2019. – 35 с. Режим доступа: https://cfд.spbstu.ru/agarbaruk/turb_models/Term8_Lec02_transition.pdf
4. Воронков С. С. О механизме генерации вихревых трубок в пограничном слое вязкого газа. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2020, 2.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
6. Воронков С. С. О законе возникновения турбулентности в вязком теплопроводном газе. Электронный журнал «Техническая акустика», <http://www.ejta.org>, 2016, 6.
7. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. – Новосибирск: Наука, 1982. – 151 с.
8. Nishioka M., Asai M., Iida S. An experimental investigation of the secondary instability. – In: IUTAM-Symposium on Laminar-Turbulent Transition. Abstracts. Stuttgart, 1979, p. 30–31.

9. Knapp C. F., Roache P. J. A combined visual and hot-wire, anemometer investigation of boundary layer transition. – AIAA J., 1968, v. 6, № 1, p. 29–36.
10. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир. 1986. – 184 с.
11. Линь Цзя-цзяо. Статистические теории турбулентности, в кн.: Турбулентные течения и теплопередача, под ред. Линь Цзя-цзяо. – М.: ИИЛ, 1963, с. 206-264.
12. Фрост У., Битте Ю. Статистические концепции теории турбулентности, в кн.: Турбулентность. Принципы и применения, под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. – М.: Мир, 1980, с. 66-98.
13. Теннекес Г. Турбулентность: диффузия, статистика, динамика спектров, в кн.: Турбулентность. Принципы и применения, под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. – М.: Мир, 1980, с. 142-163.